

BỘ NÔNG NGHIỆP VÀ PTNT
MARD

NGÂN HÀNG PHÁT TRIỂN CHÂU Á
ADB

TRƯỜNG CAO ĐẲNG NÔNG NGHIỆP NAM BỘ

Th.S TRẦN CHÍ THÀNH

GIÁO TRÌNH **LỰC HỌC**

(CHƯƠNG TRÌNH TRUNG CẤP CHUYÊN NGHIỆP)



Asian Development Bank

TIỀN GIẢNG NĂM 2012

MỤC LỤC

MỤC LỤC	1
LỜI NÓI ĐẦU	4
Phần 1. TĨNH HỌC	6
Chương 1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN TRONG TĨNH HỌC	7
1.1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN	7
1.1.1. Vật rắn tuyệt đối	7
1.1.2. Trạng thái cân bằng	8
1.1.3. Lực	8
1.1.4. Hệ lực	10
1.1.5. Hai lực trực đối	11
1.1.6. Một số lực thường gặp trong thủy lợi	11
1.2. LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT	12
1.2.1. Khái niệm	12
1.2.2. Các loại liên kết thường gặp	12
1.2.3. Nhận định hệ lực tác dụng lên một vật rắn cân bằng. Giải phóng liên kết	15
1.3. CÁC NGUYÊN LÝ TĨNH HỌC	17
1.3.1. Nguyên lý về hai lực cân bằng	17
1.3.2. Nguyên lý về thêm (bớt) hai lực cân bằng	18
1.3.3. Nguyên lý hình bình hành lực	18
1.3.4. Nguyên lý về lực tác dụng và lực phản tác dụng	19
1.3.5. Nguyên lý độc lập tác dụng	19
1.4. MÔMEN VÀ NGẪU LỰC	20
1.4.1. Mômen của một lực đối với một điểm	20
1.4.2. Mômen của hợp lực đối với một điểm	21
1.4.3. Ngẫu lực	23
Chương 2.	27
HỆ LỰC CÂN BẰNG - TÍNH TOÁN PHẢN LỰC LIÊN KẾT	27
2.1. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN VỀ LỰC VÀ HỆ LỰC	27
2.1.1. Phép cộng các lực	27
2.1.2. Cách phân tích một lực thành hai lực thành phần	33
2.1.4. Phép dời lực	43
2.1.5. Thu gọn hệ lực phẳng bất kỳ	44
2.2. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC	49
2.2.1. Điều kiện cân bằng với hệ lực phẳng bất kỳ	49
2.2.2. Điều kiện cân bằng với các hệ lực phẳng đặc biệt	54
2.3. XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC TRONG CÁC CẤU KIỆN CHỊU LỰC THƯỜNG GẶP	57
2.3.1. Mục đích, ý nghĩa	57
2.3.2. Nguyên tắc	57
2.3.3. Trình tự và cách xác định	58
2.3.4. Ví dụ minh họa	59

HẾT CHƯƠNG 2.....	66
Phần 2. SỨC BỀN VẬT LIỆU.....	66
Chương 3. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN.....	66
3.1. NHIỆM VỤ, ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU.....	66
CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU.....	66
3.2. CÁC GIẢ THUYẾT CƠ BẢN VỀ VẬT LIỆU.....	68
3.2.1. Khái niệm về tính đàn hồi của vật liệu.....	68
3.2.2. Các giả thuyết cơ bản về vật liệu.....	69
3.3. NGOẠI LỰC, NỘI LỰC VÀ ỨNG SUẤT.....	70
3.3.1. Ngoại lực.....	70
3.3.2. Nội lực.....	71
Chương 4. ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG.....	74
4.1. MÔ MEN TÍNH CỦA HÌNH PHẪNG VÀ TRỌNG TÂM CỦA HÌNH PHẪNG.....	74
4.1.1. Định nghĩa.....	74
4.1.2. Công thức thông dụng.....	75
4.1.3. Trọng tâm của hình phẳng.....	75
4.1.4. Ví dụ áp dụng.....	77
4.2. MÔ MEN QUÁN TÍNH CỦA HÌNH PHẪNG.....	78
4.2.1. Các loại mômen quán tính.....	78
4.2.1. Các loại hệ trục tọa độ.....	79
4.2.3. Mômen quán tính của một số hình phẳng đơn giản.....	81
4.2.4. Công thức chuyển trục song song.....	84
4.2.5. Các ví dụ.....	85
4.3. BÁN KÍNH QUÁN TÍNH.....	88
4.3.1. Định nghĩa.....	88
4.3.2. Bán kính quán tính của một số hình đơn giản.....	88
Chương 5. KÉO NÉN ĐÚNG TÂM.....	94
5.1. KHÁI NIỆM VỀ THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM. LỰC DỌC VÀ BIỂU ĐỒ LỰC DỌC.....	94
5.1.1. Khái niệm về thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.....	94
5.1.2. Lực dọc N và biểu đồ lực dọc.....	94
5.2. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG.....	96
5.2.1. Ứng suất trên mặt cắt.....	96
5.2.2. Biến dạng dọc và ngang.....	98
5.2.3. Định luật Húc.....	100
5.3. TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU.....	103
5.3.1. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo.....	103
5.3.2. Thí nghiệm nén vật liệu dẻo.....	105
5.3.3. Thí nghiệm kéo vật liệu giòn.....	106
5.3.4. Thí nghiệm nén vật liệu giòn.....	106
5.4. TÍNH ĐỘ BỀN CHO THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM.....	107
5.4.1. Khái niệm.....	107
5.4.2. Tính độ bền cho thanh chịu kéo (nén) đúng tâm không xét đến uốn dọc.....	110
5.4.3. Tính độ bền cho thanh chịu kéo (nén) đúng tâm có xét đến uốn dọc.....	115

5.5. MẶT CẮT HỢP LÝ CỦA THANH	125
Chương 6. UỐN NGANG PHẪNG	132
6.1. KHÁI NIỆM CHUNG	132
6.1.2. Gối tựa và phản lực gối tựa.....	132
6.2. NỘI LỰC TRONG DÀM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG	133
6.2.1. Khái niệm.....	133
6.2.2. Xác định nội lực tại mặt cắt bất kỳ	134
6.3. BIỂU ĐỒ NỘI LỰC	135
6.3.1. Định lý Giu-rap-xki	136
6.3.2. Các phương pháp vẽ biểu đồ Q và M.....	137
6.4. ỨNG SUẤT PHÁP TRÊN MẶT CẮT NGANG CỦA DÀM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG	153
6.4.1. Dàm chịu uốn thuần túy.....	153
6.4.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của dàm chịu uốn ngang phẳng	160
6.4.3. Mặt cắt ngang hợp lý của dàm chịu uốn ngang phẳng.....	161
6.5. TÍNH TOÁN DÀM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG THEO ĐIỀU KIỆN BỀN VỀ ỨNG SUẤT PHÁP	163
6.5.1. Điều kiện bền.....	163
6.5.2. Ba bài toán cơ bản	164
6.5.3. Các ví dụ	164
6.6. ỨNG SUẤT TIẾP TRÊN MẶT CẮT NGANG CỦA DÀM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG	167
6.6.1. Khái niệm.....	167
6.6.2. Công thức tính ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ.....	168
6.6.3. Sự phân bố của ứng suất tiếp và công thức tính ứng suất tiếp lớn nhất của một số hình thường gặp.....	170
6.6.4. Điều kiện bền về ứng suất tiếp và bài toán kiểm tra bền	172
6.7. KHÁI QUÁT VỀ CHUYỂN VỊ CỦA DÀM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG ..	173
6.7.1. Khái niệm về đường đàn hồi - Độ võng góc xoay.....	173
6.7.2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi.....	174
6.7.3. Tính độ võng và góc xoay của dàm chịu uốn bằng phương pháp tích phân bất định 175	
6.7.4. Điều kiện cứng của dàm	177
Chương 7. THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP	182
7.1. KHÁI NIỆM.....	182
7.1.1. Khái niệm về thanh chịu lực phức tạp	182
7.1.2. Khái quát về cách xác định nội lực, ứng suất trong thanh chịu lực phức tạp	182
7.2. NÉN LỆCH TÂM	183
7.2.1. Khái niệm.....	183
7.2.2. Nội lực và biểu đồ nội lực	183
7.2.4. Điều kiện bền và bài toán kiểm tra bền về ứng suất pháp	185
7.2.5. Lõi mặt cắt.....	189
7.3. KHÁI QUÁT VỀ BÀI TOÁN KIỂM TRA BỀN CỦA CÁC THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP KHÁC	192
7.3.1. Uốn xiên	192

7.3.2. Uốn phẳng đồng thời kéo (hoặc nén)	192
Phần 3. CƠ HỌC KẾT CẤU	197
Chương 8. KẾT CẤU SIÊU TĨNH.....	197
8.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH	197
8.1.1. Khái niệm.....	197
8.1.3. Bậc siêu tĩnh	199
8.2.1. Khái niệm.....	199
8.2.2. Phân loại	199
8.2.3. Vẽ biểu đồ nội lực theo phương pháp phương trình 3 mômen.....	200
8.2.4. Vẽ biểu đồ nội lực theo phương pháp tra bảng.....	204
8.2. KHUNG CỨNG SIÊU TĨNH.....	207
8.3.1. Khái niệm.....	207
8.3.2. Vẽ biểu đồ nội lực theo phương pháp tra bảng.....	207
Phụ lục số 1. Các đặc trưng hình học của một số hình phẳng.....	211
Phụ lục số 2. Các phản lực trong dầm siêu tĩnh một nhịp	213
Phụ lục số 3. Mômen uốn, lực cắt và phản lực trong dầm liên tục có độ dài nhịp như nhau chịu tác dụng của tải trọng.....	220
Phụ lục số 4. Mômen uốn và phản lực trong một số kết cấu	230
TÀI LIỆU THAM KHẢO	235

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình Lực học là một trong những giáo trình kỹ thuật cơ sở chính để đào tạo cán bộ bậc trung cấp chuyên nghiệp (TCCN) ngành Thủy lợi tổng hợp tại Trường Cao đẳng Nông nghiệp Nam Bộ. Giáo trình có thể làm tài liệu chính cho đào tạo TCCN các ngành Thủy nông, Quản lý khai thác công trình thủy lợi và là tài liệu tham khảo cho học sinh TCCN ngành Công trình thủy lợi, cán bộ kỹ thuật thủy lợi và các ngành liên quan như xây dựng, giao thông...

Môn Lực học đã được giảng dạy từ nhiều năm trước đây tại ba trường Trung học Thủy lợi 1 (Phủ Lý), Thủy lợi 2 (Hội An) và Thủy lợi 3 (Mỹ Tho) thuộc Bộ Thủy Lợi. Bộ Nông nghiệp và Phát triển nông thôn đã ban hành Chương trình đào tạo Trung học chuyên nghiệp ngành Thủy lợi tổng hợp theo Quyết định số 3644/QĐ-BNN/TCCB, ngày 27/12/2005, trong đó có Chương trình môn học Lực học. Tuy nhiên, do nhiều nguyên nhân, cả ba trường đều chưa có điều kiện biên soạn giáo trình riêng cho môn học, mà sử dụng ba giáo trình sau làm tài liệu giảng dạy chính thức cho môn học: Cơ sở cơ học lý thuyết – Phần tĩnh học; Sức bền vật liệu – Tập 1 và Tập 2; Cơ học kết cấu – Tập 2: Hệ siêu tĩnh. Đây là các giáo trình cho học sinh trung học chuyên nghiệp, do Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp tổ chức biên soạn và xuất bản lần đầu vào năm 1962, 1963 sau đó hiệu chỉnh tái bản lại một số lần. Ngoài việc dạy và học môn học phải sử dụng tới bốn tập tài liệu cũ không trùng tên, không theo kết cấu môn học được chương trình quy định rất phiền hà, khó theo dõi cho người học; sau 50 năm, một số nội dung trong các giáo trình này không còn phù hợp hoặc không cập nhật kịp các tiến bộ của khoa học kỹ thuật ngày nay.

Được sự chỉ đạo của Bộ Nông nghiệp và PTNT, sự hỗ trợ kinh phí của Dự án Khoa học công nghệ Nông nghiệp – Khoản vay 2283 – VIE(SF), vốn vay ADB - Nhà trường tổ chức xây dựng 3 chương trình đào tạo bậc cao đẳng, trung cấp chuyên nghiệp đáp ứng nhu cầu xã hội và viết 18 giáo trình, trong đó có giáo trình Lực học.

Giáo trình được biên soạn theo Chương trình môn Lực học, đã được Hội đồng Thẩm định chương trình đào tạo bậc trung cấp chuyên nghiệp ngành Thủy lợi tổng hợp thông qua, Hiệu trưởng nhà trường ký quyết định ban hành. Giáo trình đã được Hội đồng Thẩm định giáo trình thông qua và Hiệu trưởng ký quyết định phê duyệt cho phép sử dụng trong nhà trường. Giáo trình gồm 3 phần, 8 chương:

- *Phần 1. Tĩnh học*, gồm 2 chương:

Chương 1. *Những khái niệm cơ bản trong tĩnh học*

Chương 2. Hệ lực cân bằng – Tính toán phản lực liên kết

- Phần 2. Sức bền vật liệu, gồm 5 chương:

Chương 3. Những khái niệm cơ bản

Chương 4. Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang

Chương 5. Kéo nén đúng tâm

Chương 6. Uốn ngang phẳng

Chương 7. Thanh chịu lực phức tạp

- Phần 3. Cơ học kết cấu, gồm 1 chương:

Chương 8. Kết cấu siêu tĩnh

Sau mỗi chương đều có câu hỏi và bài tập dành cho học sinh thực hành, ôn tập kiến thức đã học. Để giúp học sinh tham khảo các giáo trình khác thuận lợi, ký hiệu phản lực ở Phần 2 vẫn sử dụng ký hiệu phản lực V_A , H_A của môn Sức bền vật liệu, khác với Phần 1 và Phần 3 ký hiệu là X_A , Y_A , R_A . Tác giả đã cố gắng tham khảo nhiều tài liệu và cập nhật những kiến thức mới nhất giúp học sinh thuận lợi trong sử dụng giáo trình học tập, nghiên cứu.

Nhân dịp này, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Vụ Tổ chức cán bộ, Ban quản lý Trung ương dự án KHCN Nông nghiệp, vốn vay ADB (Bộ Nông nghiệp và PTNT) và nhiều đồng nghiệp đã khuyến khích, động viên, giúp đỡ tác giả hoàn thành giáo trình này.

Do sự phát triển quá nhanh của khoa học, kỹ thuật, công nghệ, nên mặc dù đã có nhiều cố gắng, đồng thời là lần đầu tiên biên soạn giáo trình này nên chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp xây dựng của đồng nghiệp, của học sinh – sinh viên để lần xuất bản sau giáo trình sẽ hoàn chỉnh hơn. Xin chân thành cảm ơn.

T.C.T

Phần 1. TĨNH HỌC

Tĩnh học là phần nghiên cứu trạng thái cân bằng của vật rắn (vật rắn tuyệt đối) dưới tác dụng của các lực. Hai vấn đề chính được nghiên cứu trong tĩnh học là:

1. Thu gọn hệ lực, tức biến đổi hệ lực đã cho thành một hệ lực khác tương đương với nó, nhưng đơn giản hơn. Thu gọn hệ lực về dạng đơn giản nhất được gọi là dạng tối giản của hệ lực. Tập hợp các dạng tối giản khác nhau của các hệ lực được gọi là các dạng chuẩn của hệ lực.

2. Thiết lập các điều kiện đối với hệ lực mà dưới tác dụng của nó vật rắn cân bằng, được gọi tắt là các điều kiện cân bằng của hệ lực.

Để giải quyết hai vấn đề trên, trong tĩnh học sử dụng phương pháp tiên đề, là phương pháp dựa trên các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề, nhờ các suy diễn logic để tìm các quy luật của đối tượng nghiên cứu.

Các khái niệm cơ bản là những khái niệm nền tảng đầu tiên để xây dựng nội dung môn học, còn các tiên đề là những mệnh đề công nhận các tính chất của các khái niệm cơ bản.

Chương 1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN TRONG TĨNH HỌC

1.1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Những khái niệm cơ bản nhất của tĩnh học là vật rắn, lực và trạng thái cân bằng.

1.1.1. Vật rắn tuyệt đối

Vật rắn tuyệt đối là vật thể không bị biến dạng trong mọi trường hợp chịu lực, tức là trong suốt thời gian chịu lực tác dụng vật vẫn giữ nguyên hình dạng ban đầu, hay khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ nào của vật cũng luôn luôn không thay đổi.

Trong thực tế không có vật nào là rắn tuyệt đối, mọi vật khi chịu tác dụng của lực thì hoặc biến dạng ít hoặc biến dạng nhiều. Người ta coi vật là vật rắn tuyệt đối vì nếu những biến dạng xảy ra trong vật rắn không lớn lắm thì với phép tính gần đúng có thể coi các biến dạng đó là không đáng kể, hơn nữa nếu coi vật là rắn tuyệt đối thì việc tính toán trong quá trình khảo sát vật sẽ đơn giản hơn nhiều.

Vì vậy, vật rắn tuyệt đối chính là vật thể đàn hồi được lý tưởng hóa bỏ qua biến dạng. Những trường hợp xem vật là rắn tuyệt đối không đủ để giải quyết vấn đề, khi đó phải kể đến biến dạng, và trở thành phạm vi nghiên cứu của giáo trình Sức bền vật liệu.

Từ đây, nếu không có lưu ý gì, vật khảo sát được hiểu là vật rắn tuyệt đối, và gọi tắt là vật rắn.

1.1.2. Trạng thái cân bằng

Mọi vật rắn nghiên cứu trong tĩnh học đều cân bằng. Vật rắn được gọi là cân bằng khi vị trí của nó không thay đổi so với vị trí của một vật nào đó được chọn làm chuẩn gọi là hệ quy chiếu. Trong tĩnh học, hệ quy chiếu được chọn là hệ quy chiếu trong đó tiên đề quán tính được thỏa mãn, nó được gọi là hệ quy chiếu quán tính. Vấn đề này được trình bày chi tiết trong các giáo trình phần Động lực học. Cân bằng đối với hệ quy chiếu quán tính được gọi là cân bằng tuyệt đối.

Vật lý học hiện đại đã chứng minh rằng không tồn tại hệ quy chiếu quán tính. Do vậy, chỉ có thể chọn các hệ quy chiếu gần đúng hệ quy chiếu quán tính. Trong kỹ thuật, hệ quy chiếu quán tính gần đúng được chọn là trái đất. Vật rắn được gọi là cân bằng đối với một hệ quy chiếu nếu nó đứng yên hay chuyển động thẳng đều đối với hệ quy chiếu đó. Có thể coi vật cân bằng là vật nằm yên hoặc chuyển động thẳng đều đối với trái đất.

1.1.3. Lực

1.1.3.1. Định nghĩa về lực

Trong thực tế, các vật thể luôn luôn tác động tương hỗ lẫn nhau. Vì thế khi khảo sát chuyển động của vật ta không thể bỏ qua ảnh hưởng của những vật xung quanh tác dụng lên vật đó. Chẳng hạn trái đất hút mặt trăng làm cho mặt trăng chạy vòng quanh trái đất thì ngược lại mặt trăng cũng hút trái đất do đó có hiện tượng thủy triều; vật đặt trên bàn tác dụng lên bàn một sức ép, ngược lại bàn cũng đặt lên vật một lực đỡ giữ cho vật khỏi rơi. Chính tác dụng tương hỗ giữa các vật đó gọi là lực, nó là nguyên nhân làm thay đổi vận tốc của vật (hay còn nói làm thay đổi trạng thái động học của vật). Như vậy có thể định nghĩa: *Lực là tác dụng tương hỗ giữa các vật mà kết quả là gây nên sự thay đổi trạng thái động học của các vật đó.* Nói gọn hơn: *Tác dụng tương hỗ cơ học được gọi là lực.* Hay: *Lực là đại lượng đặc trưng cho tác dụng cơ học của vật thể này lên vật thể khác.* Hay: *Lực là bất cứ tác động nào có thể làm thay đổi trạng thái tĩnh hoặc động của một vật thể.*

Có thể nhận ra được sự tồn tại của một lực nhờ vào những tác động mà lực tạo ra. Người ta ứng dụng lực nhờ vào sự tiếp xúc trực tiếp về vật lý giữa các vật thể

hoặc nhờ vào tác động từ xa. Trọng lực, điện lực và lực từ trường đều được ứng dụng thông qua tác động từ xa, còn hầu hết những lực khác đều được ứng dụng nhờ vào sự tiếp xúc trực tiếp.

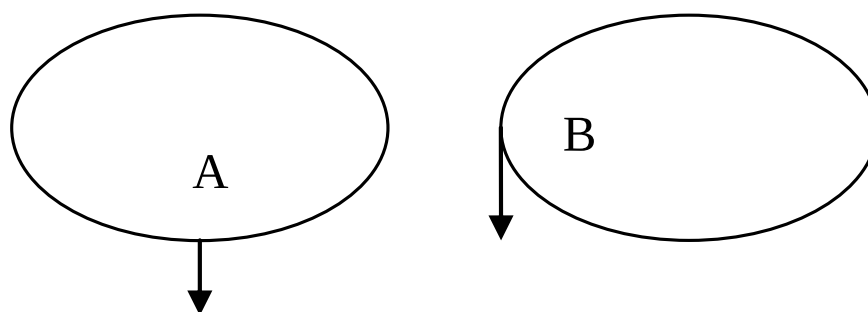
Cũng cần lưu ý có những tác dụng tương hỗ gây nên các biến đổi động học không phải là dễ thấy, như quá trình điện từ, hóa học ... Cơ học không nghiên cứu những tác dụng tương hỗ nói chung, mà chỉ nghiên cứu những tác dụng tương hỗ gây nên những biến đổi động học mà trong đó có sự chuyển dời vị trí.

1.1.3.2. Các yếu tố của lực

Thực nghiệm chứng minh rằng lực được đặc trưng bởi các yếu tố sau:

- Điểm đặt của lực: Là điểm mà vật được truyền tác dụng tương hỗ cơ học từ vật khác.

Ví dụ, theo hình 1.1. khi lực đặt ở A, vật đi thẳng; khi lực đặt ở B vật vừa chuyển động vừa quay.



Hình 1.1. Điểm đặt của lực tại A và B khác nhau

- Phương chiều của lực: Là phương chiều chuyển động từ trạng thái yên nghỉ của chất điểm (vật có kích thước bé) chịu tác dụng của lực. Bất kỳ lực nào khi tác dụng vào một vật đều có phương chiều (hướng) nhất định. Ví dụ, lực ma sát ngược chiều phương chuyển động, trọng lực hướng về tâm trái đất. Đường thẳng theo đó lực tác dụng lên vật gọi là đường tác dụng của lực (còn gọi là giá)

- Cường độ của lực (còn gọi là trị số của lực): Là số đo tác dụng mạnh yếu của lực so với lực được chọn làm chuẩn gọi là đơn vị lực. Đơn vị lực là Niuton, ký hiệu là N. Theo Nghị định số 134/2007/NĐ-CP, ngày 15 tháng 8 năm 2007 của Chính phủ Quy định về đơn vị đo lường chính thức của nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam, thì dùng đơn vị kilogam lực, ký hiệu là kG. $1 \text{ kG} = 9,80665 \text{ N}$. Trong phép tính gần đúng có thể chọn $1 \text{ kG} \approx 10 \text{ N}$.

- Cách biểu diễn lực: Lực không những được xác định về trị số mà cả về phương, chiều và điểm đặt. Như vậy, lực là một đại lượng véctơ. Người ta biểu diễn véctơ lực bằng một đoạn thẳng có hướng $\overrightarrow{AB}$. Ký hiệu $\overrightarrow{AB} = \vec{F}$, gốc A là điểm đặt của lực, dấu mũi tên ngang chỉ phương chiều của lực, và độ lớn của AB chỉ trị số của véctơ lực theo một tỷ lệ xích được chọn.

- Phân loại lực: Lực có thể được sắp xếp thành các loại lực phân bố và lực tập trung; ngoại lực và nội lực.

Lực phân bố được sử dụng như trên một tuyến đường, một diện tích hay xuyên suốt toàn bộ thể tích. Trọng lượng của một cái dầm có thể được coi như một lực phân bố trên chiều dài của nó.

Lực tập trung là một lực lý tưởng trong đó lực được thừa nhận là tác động tại một điểm. Một lực có thể được gọi là lực tập trung nếu diện tích đặt lực tương đối nhỏ bé so với toàn bộ diện tích bề mặt của vật thể.

Một lực được gọi là ngoại lực nếu nó được một vật thể này tác động qua một vật thể khác.

Dưới tác dụng của ngoại lực, vật hoặc kết cấu sinh ra các lực bên trong để làm vật hay hệ vật cân bằng, các lực sinh ra bên trong vật, hay một cấu kiện gọi là nội lực. Ví dụ, trọng lực của một cái dầm và phản lực ở 2 đầu dầm là những ngoại lực. Lực sinh ra trong dầm cân bằng với ngoại lực gọi là nội lực.

1.1.4. Hệ lực

1.1.4.1. Khái niệm

Tập hợp các lực cùng tác dụng vào một vật rắn nào đó gọi là một hệ lực. Ký hiệu của một hệ lực: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$. Trong đó, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ là các lực thành phần của hệ lực tác dụng lên vật.

1.1.4.2. Hệ lực tương đương

Nếu thay thế một hệ lực này bằng một hệ lực khác mà trạng thái đứng yên hay chuyển động của vật không thay đổi thì hai hệ lực đó được gọi là tương đương. Nói cách khác, hệ lực tương đương với hệ lực khác khi nó có tác dụng cơ học như hệ lực đó. Trong cơ học, lấy dấu “ $\equiv$ ” (ba gạch ngang song song) làm ký hiệu về sự tương đương. Ví dụ:

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n) \equiv (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \dots, \vec{Q}_n)$, tức là hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ tương đương với hệ lực $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \dots, \vec{Q}_n)$

1.1.4.3. Hệ lực cân bằng

Hệ lực cân bằng là hệ lực nếu tác dụng lên vật rắn không làm thay đổi trạng thái chuyển động của vật khi không chịu tác dụng của hệ lực ấy. Trong trường hợp riêng, dưới tác dụng của hệ lực vật rắn cân bằng thì hệ lực được gọi là hệ lực cân bằng. Hệ lực cân bằng còn được gọi là hệ lực tương đương với không và được ký hiệu: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n) \equiv 0$

1.1.4.4. Hợp lực của một hệ lực

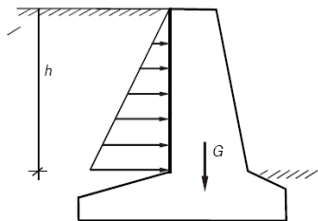
Nếu có một lực duy nhất nào đó tương đương với một hệ lực thì lực đó gọi là hợp lực của hệ lực. Nói cách khác, hợp lực của một hệ lực là một lực duy nhất tương đương với hệ lực ấy. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$, ta có: $\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$

1.1.5. Hai lực trực đối

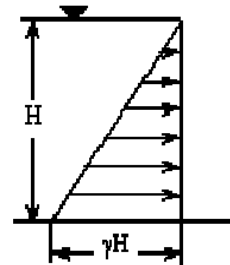
Hai lực gọi là trực đối nhau khi chúng có trị số bằng nhau, cùng đường tác dụng, nhưng ngược chiều nhau.

1.1.6. Một số lực thường gặp trong thủy lợi

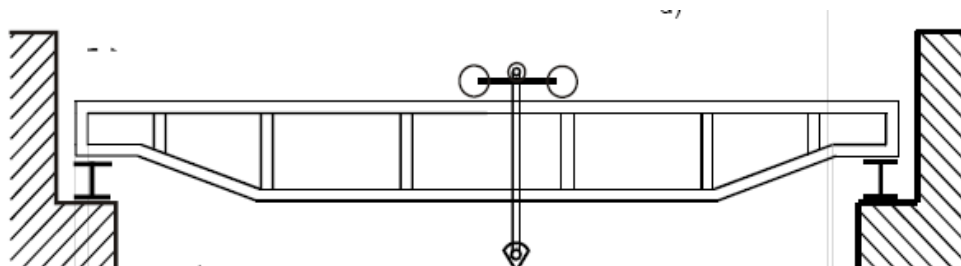
Trong ngành thủy lợi có nhiều lực tác dụng phổ biến, ví dụ như lực tác dụng lên tường chắn đất (hình 1.2), lực thủy tĩnh tác dụng lên thành bể (hình 1.3), lực tác dụng trên hệ thống cần trục đóng mở cửa van, hay máy bơm các công trình thủy lợi (hình 1.4)



Hình 1.2. Lực phân bố tác dụng lên tường chắn đất



Hình 1.3. Lực nước phân bố tác dụng lên thành bể



Hình 1.4. Lực trên hệ thống cần trục đóng mở cửa van cống hoặc trạm bơm điện

1.2.LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

1.2.1. Khái niệm

1.2.1.1.Vật thể tự do và vật không tự do

Vật thể được gọi là tự do khi nó có thể chuyển động tùy ý theo mọi phương trong không gian mà không bị cản trở. Ví dụ, khi hòn đá đã được buông ra hay ném đi rồi thì nó là một vật tự do. Trái lại, những vật mà chuyển động của nó theo một vài phương nào đó bị cản trở gọi là vật không tự do. Ví dụ, vật rắn đặt trên bàn hay cột vào dây đều là những vật không tự do.

Trong cơ học, những điều kiện cản trở chuyển động của vật gọi là liên kết. Vật gây ra sự cản trở chuyển động của vật khảo sát gọi là vật gây liên kết. Ở ví dụ trên, mặt bàn, sợi dây là những vật gây liên kết. Vật không tự do còn được gọi là vật chịu liên kết. Trong tĩnh học chỉ khảo sát loại liên kết được thực hiện bằng sự tiếp xúc hình học giữa vật thể được khảo sát với các vật thể khác, đó là những liên kết hình học.

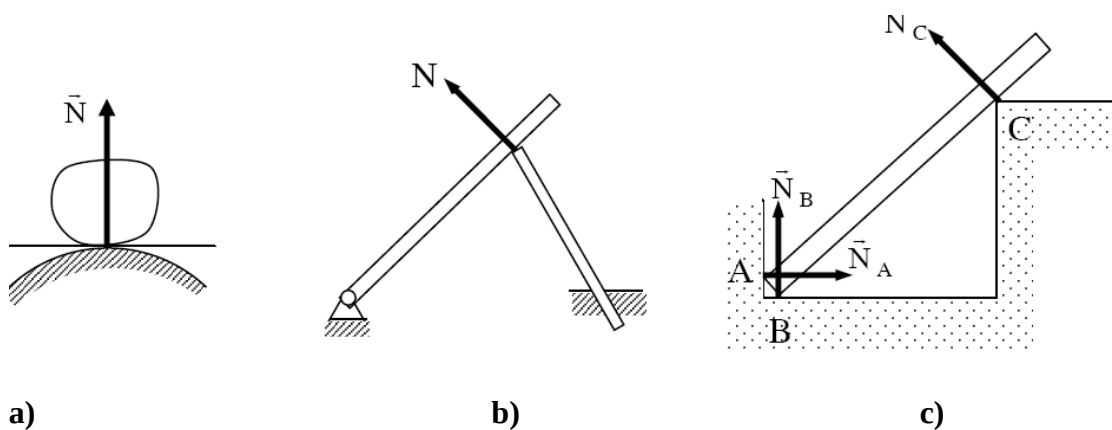
1.2.1.2.Phản lực liên kết

Sở dĩ có sự cản trở chuyển động là do tại các mối liên kết, vật gây liên kết đã tác dụng lên vật khảo sát một lực làm hạn chế chuyển động của vật. Lực đó được gọi là phản lực liên kết. Phản lực liên kết đặt vào vật khảo sát, nằm cùng phương, ngược chiều với chiều chuyển động bị cản trở. Từ đây có thể rút ra một quy tắc: Nếu theo một phương nào đó chuyển động không bị cản trở, thì theo phương đó không có thành phần phản lực. Nói cách khác, phản lực vuông góc với phương chuyển động không bị cản trở.

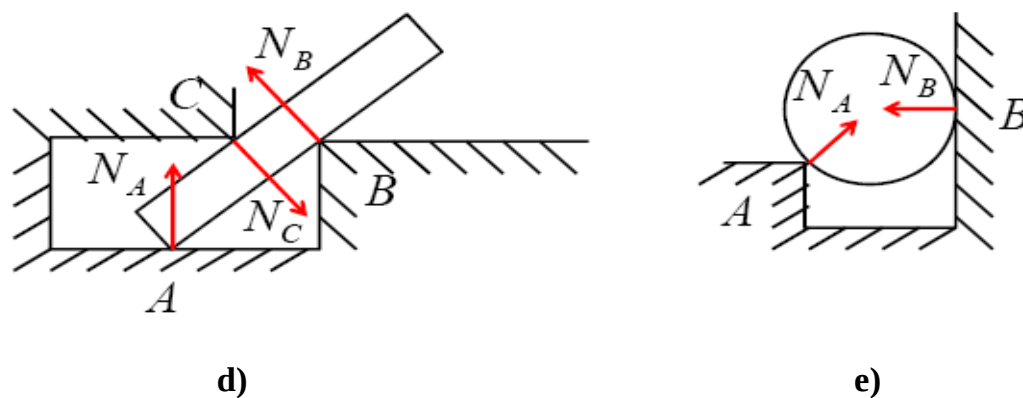
1.2.2. Các loại liên kết thường gặp

1.2.2.1. Liên kết tựa

Liên kết tựa (hình 1.5) là liên kết mà các vật chỉ có tác dụng đỡ lấy nhau. Hai vật liên kết tựa khi chúng trực tiếp tựa lên nhau. Trong trường hợp này chỉ có chuyển động của vật theo phương pháp tuyến với mặt tiếp xúc chung của liên kết là bị cản trở. Phản lực là một lực hướng theo pháp tuyến của mặt tiếp xúc chung của liên kết, ký hiệu là $\vec{N}$. Như vậy, trong loại liên kết này phản lực chỉ có một yếu tố chưa biết là trị số của nó.



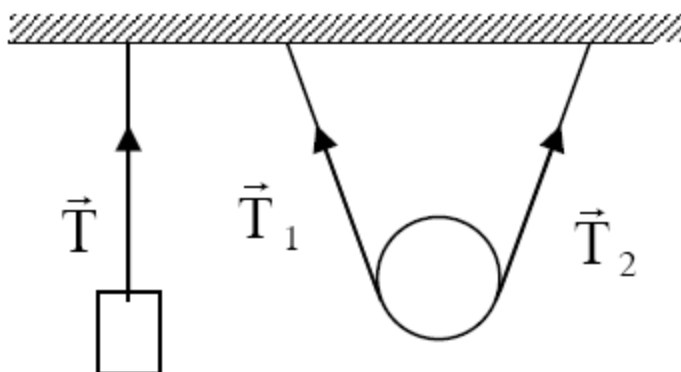
Hình 1.5. a, b, c: Các ví dụ về liên kết tựa



Hình 1.5. d, e: Các ví dụ về liên kết tựa

1.2.2.2. Liên kết dây mềm

Loại liên kết này chiều kéo căng của dây bị cản trở. Phản lực hướng dọc theo dây về phía trên, ký hiệu là $\vec{T}$ như hình vẽ 1.6.



Hình 1.6. Liên kết dây mềm

Với loại liên kết này phản lực cũng có một yếu tố chưa biết là trị số của nó.

1.2.2.3. Liên kết bản lề

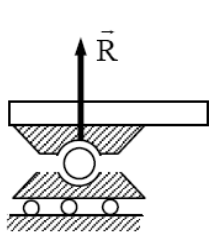
Hai vật có liên kết bản lề khi chúng có trục (chốt) chung. Có hai loại liên kết bản lề: Gối đỡ bản lề di động (hình 1.7) và gối đỡ bản lề cố định (hình 1.8).

- Đối với loại gối đỡ bản lề di động, vật tựa vừa có thể quay quanh trục bản lề, vừa có thể di chuyển song song với mặt phẳng tựa. Như thế, chỉ có chuyển động của vật tựa theo phương pháp tuyến là bị cản trở, do đó phản lực là một lực hướng theo pháp tuyến của mặt tựa và đi qua tâm của bản lề, ký hiệu $\vec{N}$. Phản lực chỉ có một yếu tố chưa biết là trị số của nó.

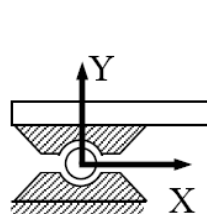
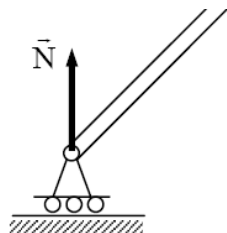
Một ổ trục, nếu nó chỉ chịu tác dụng bởi các lực nằm trong cùng một mặt phẳng thì phản lực cũng là một lực hướng theo pháp tuyến của mặt tựa và cũng ký hiệu là $\vec{N}$.

- Đối với gối đỡ bản lề cố định, vật tựa có thể quay quanh trục của bản lề, nhưng không thể di chuyển song song với mặt phẳng tựa được. Trường hợp này phản lực là một lực đặt ở tâm bản lề nhưng chưa biết chiều và trị số, ký hiệu là $\vec{R}$. Để thuận tiện trong tính toán, thường phân tích phản lực $\vec{R}$ chưa biết đó thành hai thành phần vuông góc với nhau $\vec{X}$ và $\vec{Y}$.

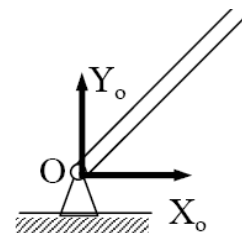
Như vậy, loại gối đỡ bản lề cố định có hai yếu tố chưa biết: Trị số của hai thành phần phản lực thẳng góc với nhau $\vec{X}$ và $\vec{Y}$.



Hình 1.7. Bản lề di động



Hình 1.8. Bản lề cố định



Qua việc xác định phản lực ở trên ta thấy, trong mọi trường hợp phản lực đều có trị số chưa biết, còn hướng của chúng trong một số trường hợp có thể biết được. Sở dĩ như vậy là vì phản lực luôn luôn có tác dụng cản trở chuyển động nên nó phụ thuộc vào hệ lực cụ thể đã tác dụng lên vật.

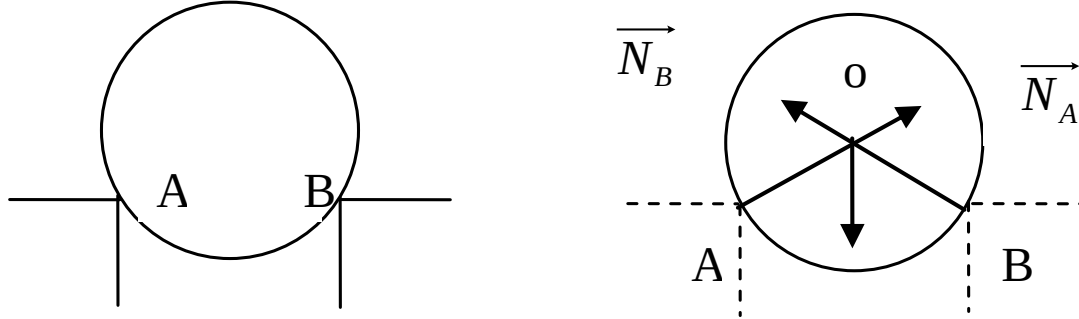
1.2.3. Nhận định hệ lực tác dụng lên một vật rắn cân bằng. Giải phóng liên kết

Trong bài các toán tĩnh học, nhiệm vụ chính thường là xác định các phản lực. Kết quả của việc xác định một phản lực lại tùy thuộc vào việc nhận định hệ lực tác dụng lên toàn bộ vật. Muốn giải được một bài toán tĩnh học, cũng như bài toán cơ học nói chung phải nắm được những lực nào đã tác dụng lên vật, tức phải biết nhận định được hệ lực tác dụng lên vật, rồi từ đó thiết lập những điều kiện, phương trình cần thiết để giải. Vì vậy, nhận định được hệ lực tác dụng lên vật là việc làm đầu tiên và là khâu quyết định quan trọng của việc giải một bài toán.

Hệ lực tác dụng lên một vật thường được phân ra làm các lực cho trước và các phản lực. Trong đó, các lực cho trước thường đã biết, nên việc nhận định đầy đủ và đúng đắn hệ lực tác dụng lên vật phụ thuộc vào việc xét các phản lực.

Để cho việc nhận định lực chủ yếu là phản lực liên kết được đúng đắn, phải phân các loại lực một cách dứt khoát và rành mạch. Muốn thế cần phải qui định rõ ràng vật khảo sát là vật nào. Sau khi đã chọn vật khảo sát để xét lực ta thường cô lập nó khỏi các vật thể xung quanh, xem như nó không chịu các liên kết, tức giải phóng các liên kết cho vật. Mỗi liên kết giải phóng phải được thay bằng phản lực tương ứng. Nói cách khác: “*Vật không tự do có thể xem là tự do nếu ta thay thế các vật gây liên kết bằng các phản lực liên kết*”, đó chính là *Tiên đề giải phóng liên kết*.

Ví dụ 1.1. Một nồi hơi có khối lượng và đặt lên hai bệ đỡ A và B (hình vẽ 1.9).
Tìm hệ lực tác dụng lên nồi hơi.



Hình 1.9. Giải phóng liên kết tựa của nồi hơi

Bài giải

Nồi hơi chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ đặt tại trọng tâm của nồi hơi và hướng thẳng đứng xuống phía dưới và tác dụng của hai liên kết là bệ đỡ A và B. Trong đó, theo vật lý, $P = mg$, với g là gia tốc trọng trường (lấy bằng 10 m/s^2). Cô lập nồi hơi khỏi các liên kết như sau: Bỏ bệ đỡ A, thay bằng phản lực của nó là $\vec{N}_A$ hướng theo AO (pháp tuyến của mặt tiếp xúc chung của liên kết tại A) và mặt nồi hơi tại A. Bỏ bệ đỡ B, thay bằng phản lực $\vec{N}_B$ hướng theo BO và đặt vào nồi hơi tại B (tương tự bệ đỡ A)

Như vậy nồi hơi chịu tác dụng của hệ lực gồm 3 lực là: $(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B)$ biểu diễn như trên hình vẽ 1.9, trong đó, $\vec{P}$ là lực cho trước, $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ là các phản lực.

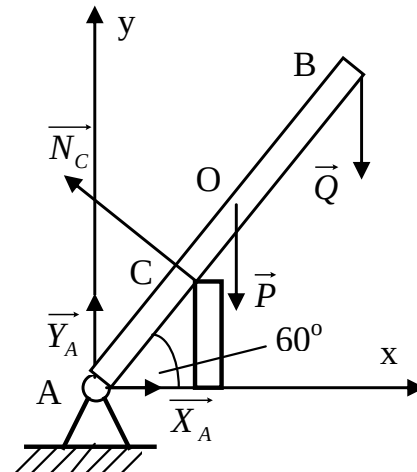
Ví dụ 1.2. Thanh AB dài 8 m,

khối lượng $m = 12 \text{ kg}$, bắt bản lề cố định tại A và tỳ lên tường C cao $h = 3 \text{ m}$. Đầu B treo một trọng vật có khối lượng $m = 20 \text{ kg}$ (hình 1.10).
Tìm hệ lực tác dụng lên thanh AB.

Bài giải

Thanh AB chịu tác dụng bởi:

- Trọng lực $\vec{P}$ của thanh, về trị số



Hình 1.10. Thanh bắt bản lề và tựa lên tường

$P = mg = 12 \times 10 = 120 \text{ N}$, hướng thẳng đứng xuống dưới và đặt tại trọng tâm O của thanh (chính giữa thanh AB)

- Trọng lực $\vec{Q}$ của vật treo, về trị số $Q = m'g = 20 \times 10 = 200 \text{ N}$ đặt tại B và hướng thẳng đứng xuống dưới.

- Liên kết gối đỡ bản lề cố định A.
- Liên kết tựa C.

Cô lập thanh AB khỏi các liên kết: Bỏ liên kết gối đỡ A, thay bằng phản lực của nó là $\vec{X}_A$ và $\vec{Y}_A$ biểu diễn như trên hình vẽ và đặt tại A. Bỏ liên kết tựa C, thay bằng phản lực $\vec{N}_C$ thẳng góc với AB và đặt vào AB tại C.

Như vậy, thanh AB chịu tác dụng của hệ lực phẳng gồm 5 lực: $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_C)$

Trong đó:

$\vec{P}, \vec{Q}$ là các lực cho

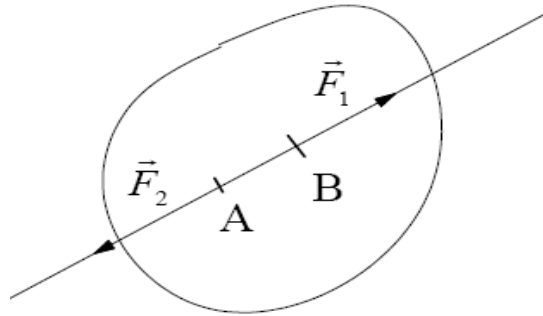
$\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, và $\vec{N}_C$ là các phản lực

Vấn đề cô lập vật cân bằng khỏi các liên kết với các vật xung quanh để đặt vào vật đó một hệ lực cân bằng giúp ta có thể biến các vật cân bằng bị liên kết thành những vật cân bằng tự do.

1.3. CÁC NGUYÊN LÝ TĨNH HỌC

1.3.1. Nguyên lý về hai lực cân bằng

Điều kiện cần và đủ để cho hệ hai lực cân bằng là chúng có cùng đường tác dụng, hướng ngược chiều nhau và có cùng cường độ, hay là chúng phải trực đối nhau (hình 1.11).



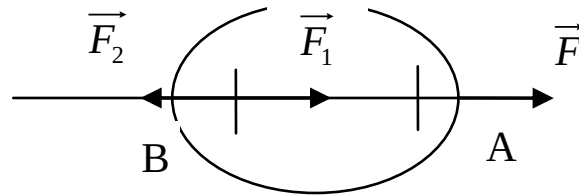
Hình 1.11. Hai lực cân bằng

1.3.2. Nguyên lý về thêm (bớt) hai lực cân bằng

Tác dụng của một hệ lực không thay đổi nếu thêm hoặc bớt hai lực cân bằng.

Hệ quả: Tác dụng của một lực không thay đổi khi trượt lực trên đường tác dụng của nó.

Thật vậy, giả sử có một lực $\vec{F}$ tác dụng tại điểm A của vật rắn (hình 1.12). Tại điểm B bất kỳ trên đường tác dụng của lực $\vec{F}$ đó, ta đặt hai lực cân bằng $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng phương và cùng trị số với lực $\vec{F}$ thì vật vẫn không thay đổi trạng thái cơ học, hệ lực mới $(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2)$ vẫn tương đương với lực $\vec{F}$ ban đầu. $(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{F}$

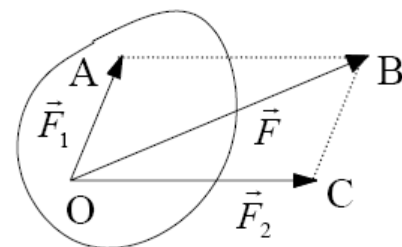


Hình 1.12. Thêm hai lực cân bằng

Theo nguyên lý về hai lực cân bằng, hai lực $\vec{F}$ và $\vec{F}_2$ trực đối nên cân bằng nhau, do đó có thể viết: $(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{F}_1$. Tức là, nếu trượt lực $\vec{F}$ từ vị trí A về vị trí B trên đường tác dụng của nó thì trạng thái cơ học của vật không thay đổi. Từ đây, ta có thể xem vector lực như là một vector trượt.

1.3.3. Nguyên lý hình bình hành lực

Hai lực cùng đặt tại một điểm tương đương với một lực đặt tại điểm đó được biểu



diễn bằng vector đường chéo hình bình hành có hai cạnh là hai lực thành phần (hình 1.13).

Như vậy, nếu gọi $\vec{F}$ là hợp lực và tương đương với hai lực thành phần $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cùng đặt tại điểm O, thì biểu thức toán học của nguyên lý hình bình hành lực được viết:

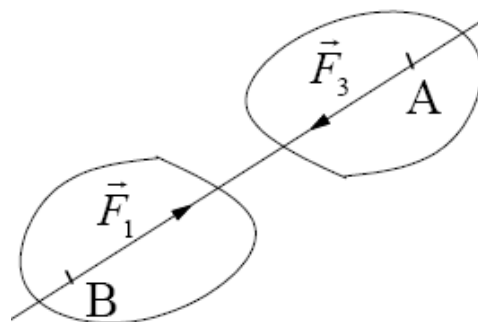
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

1.3.4. Nguyên lý về lực tác dụng và lực phản tác dụng

Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng đường tác dụng, hướng ngược chiều nhau và có cùng cường độ (hình 1.14)

Chú ý rằng lực tác dụng và lực phản tác dụng không phải là hai lực cân bằng vì chúng không tác dụng lên cùng một vật rắn.

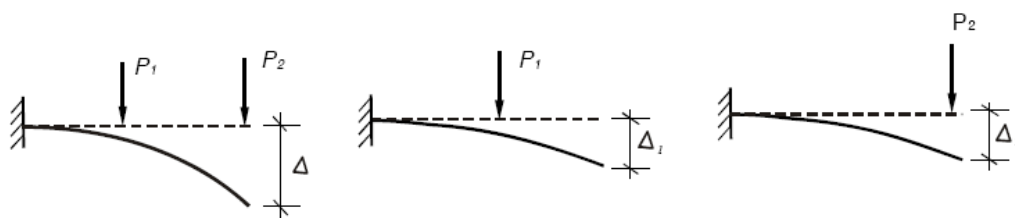
Nguyên lý này thường gặp nhiều trong thực tế kỹ thuật cũng như trong sinh hoạt hàng ngày. Chẳng hạn đặt một quả cầu lên mặt bàn. Như vậy quả cầu đã tác dụng lên mặt bàn một lực bằng trọng lượng quả cầu. Ngược lại mặt bàn cũng có một lực tác dụng đặt lên quả cầu bằng về trị số nhưng ngược chiều. Nó chứng tỏ không có tác dụng nào chỉ xảy ra một chiều cả, mà lực luôn luôn xuất hiện từng đôi, nếu vật này tác dụng lên vật khác một lực thì ngược lại nó cũng bị vật kia tác dụng lại một lực trực đối. Tùy theo vật ta khảo sát mà một lực sẽ được gọi là lực tác dụng và lực kia được gọi là phản lực tác dụng (còn gọi là phản lực)



Hình 1.14. Lực tác dụng và phản tác dụng

1.3.5. Nguyên lý độc lập tác dụng

Nguyên lý này phát biểu như sau: *Kết quả tác dụng gây ra do một hệ lực thì bằng tổng những kết quả gây ra do từng lực trong hệ đó, tác động một cách riêng biệt.*



Hình 1.15

Để minh họa nguyên lý đó ta lấy ví dụ một thanh chịu tác dụng của hệ lực $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ (hình 1.15). Độ chuyển dịch Δ của thanh gây ra do hệ lực $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ sẽ bằng tổng những độ chuyển dịch Δ_1 và Δ_2 gây ra do riêng từng lực $\vec{P}_1$ và $\vec{P}_2$.

Chú ý rằng *nguyên lý độc lập tác dụng* của các lực chỉ sử dụng được trong điều kiện vật liệu tuân theo định luật Húc và biến dạng của vật thể là rất nhỏ (giới thiệu ở Chương 3 giáo trình này).

1.4. MÔMEN VÀ NGẪU LỰC

1.4.1. Mômen của một lực đối với một điểm

1.4.1.1. Định nghĩa

Khi đặt lực $\vec{F}$ vào vật rắn có một điểm O cố định thì vật sẽ quay quanh O (hình 1.16). Quan sát kỹ ta thấy tác dụng quay của $\vec{F}$ phụ thuộc vào trị số của lực và cả vào vị trí của lực đối với điểm cố định O cụ thể là phụ thuộc vào khoảng cách d từ điểm cố định O đó đến đường tác dụng của lực, khoảng cách d này được gọi là cánh tay đòn của lực. Từ đó ta có khái niệm về mômen là đại lượng đặc trưng cho tác dụng quay của lực đối với một điểm và được định nghĩa như sau:

Mômen của một lực đối với một điểm là tích số giữa trị số của lực với cánh tay đòn của lực đối với điểm đó.

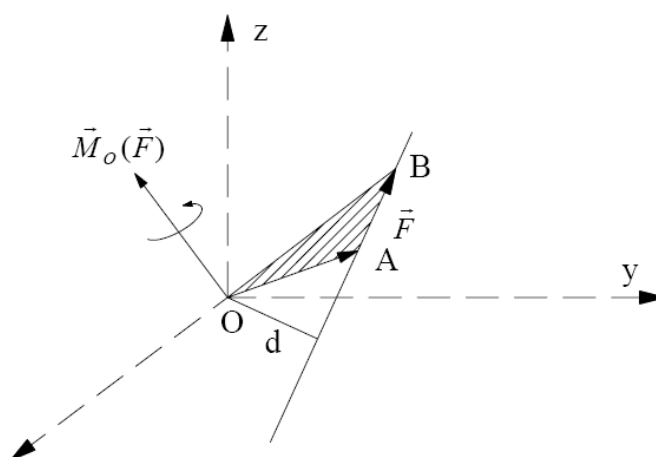
Công thức:

$$M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot d \quad (1-1)$$

Trong đó,

$M_o(\vec{F})$ là ký hiệu mô men của lực $\vec{F}$ đối với điểm O.

Điểm O được gọi là tâm mômen. Nếu lực có khuynh hướng làm cho vật quay



Hình 1.16. Mô men của lực đối với một điểm

ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm thì mômen đó được coi là dương (+), và khi quay ngược lại được coi là âm (-). Theo hình 1.15, $M_o(\vec{F}) = + F \cdot d$.

Đơn vị của mômen bằng đơn vị lực nhân với đơn vị độ dài, tức là đo bằng Nm.

1.4.1.2. Nhận xét

Từ hình 1.15 ta thấy:

- a) Trị số tuyệt đối của mômen của lực F đối với tâm O bằng hai lần diện tích tam giác AOB tạo thành do lực và tâm mômen:

$$|M_o(\vec{F})| = 2S(\Delta AOB)$$

- b) Nếu đường tác dụng của lực đi qua tâm mômen ($d=0$) thì mômen của lực đó đối với tâm O là bằng không: $|M_o(\vec{F})| = F \cdot d = F \cdot 0 = 0$

1.4.2. Mômen của hợp lực đối với một điểm

Định lý Va-ri-nhông:

Va-ri-nhông (Varignon, là nhà toán học người Pháp, 1654-1722), đưa ra định lý như sau:

Mômen của hợp lực của một hệ lực phẳng đối với một điểm bất kỳ bằng tổng đại số mômen của các lực thành phần đối với điểm ấy.

$$m_o(\vec{R}) = \sum m_o(\vec{F}) \quad (1-2)$$

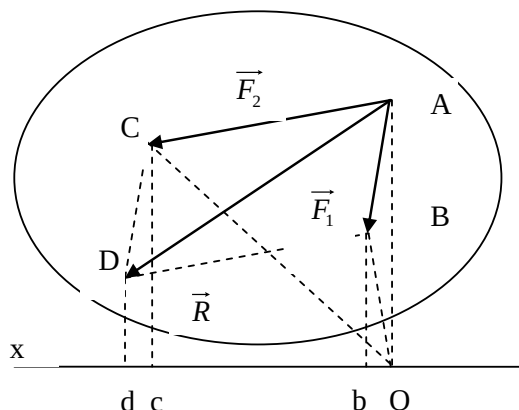
Chứng minh:

• Trường hợp hệ hai lực đồng quy

Giả sử có hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đồng quy tại A , và một điểm O bất kỳ trong mặt phẳng của hai lực này (hình 1.17). Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của chúng. Ta phải chứng minh:

$$m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2)$$

Thật vậy, nối OA từ O kẻ đường Ox thẳng góc với OA , rồi từ các điểm nút B , C và D của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và $\vec{R}$ hạ các



đường Bb, Cc, Dd thẳng góc với Ox. Mô men của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và $\vec{R}$ đối với điểm O bằng: $m_o(\vec{F}_1) = 2S(\Delta OAB) = OA \cdot Ob$; $m_o(\vec{F}_2) = 2S(\Delta OAC) = OA \cdot Oc$

$$m_o(\vec{R}) = 2S(\Delta OAD) = OA \cdot Od.$$

Theo hình vẽ ta có:

$$Od = Ob + bd = Ob + Oc$$

Vì $Oc = bd$ (đều là hình chiếu của hai đoạn thẳng song song bằng nhau AC và BD lên đường thẳng Ox).

Do đó ta có thể viết:

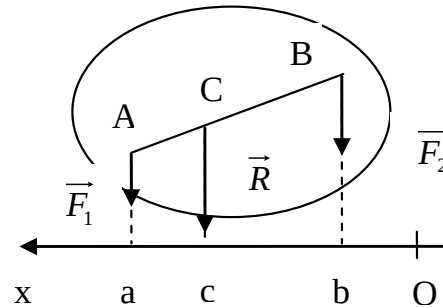
$$m_o(\vec{R}) = OA \cdot Od =$$

$$OA(Ob + Oc) = OA \cdot Ob + OA \cdot Oc$$

Tức là ta có:

$$m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2)$$

- Trường hợp hệ là hai lực song song



Hình 1.18

Giả sử có hai lực song song $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đặt tại A và B và một điểm O bất kỳ trong mặt phẳng hai lực này (hình 1.18). Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của chúng, ta cũng sẽ chứng minh rằng: $m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2)$. Thật vậy, từ O ta kẻ đường Ox thẳng góc với đường tác dụng của các lực. Ta có, $m_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot Oa$; $m_o(\vec{F}_2) = F_2 \cdot Ob$; $m_o(\vec{R}) = R \cdot Oc$.

Mà $R = F_1 + F_2$, $Oc = Ob + bc$ nên:

$$m_o(\vec{R}) = (F_1 + F_2)(Ob + bc) = F_1Ob + F_1bc + F_2bc + F_2Ob$$

$$\text{Vì } \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{bc}{ca}, \text{ hay: } F_1 \cdot ca = F_2 \cdot bc \text{ Do đó:}$$

$$m_o(\vec{R}) = F_1Ob + F_1bc + F_1ca + F_2Ob, \text{ tức là } m_o(\vec{R}) = F_1Oa + F_2Ob$$

$$\text{vậy, } m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2)$$

• Trường hợp hệ gồm nhiều lực phẳng bất kỳ

Giả sử có một hệ lực phẳng bất kỳ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n)$ và một điểm O nằm trong mặt phẳng các lực đó. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của chúng. Ta sẽ chứng minh:

$$m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) + \dots + m_o(\vec{F}_n) = \Sigma m_o(\vec{F})$$

Thật vậy, bằng cách hợp từng đôi lực một, chẳng hạn hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ ta có hợp lực $\vec{R}_1$. Hai lực này đồng quy hoặc song song nên theo chứng minh trên ta có thể viết:

$$m_o(\vec{R}_1) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2)$$

Hợp hai lực $\vec{R}_1$ và $\vec{F}_3$ được lực $\vec{R}_2$, cũng lý luận như trên ta có:

$$m_o(\vec{R}_2) = m_o(\vec{R}_1) + m_o(\vec{F}_3) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) + m_o(\vec{F}_3)$$

Cứ lần lượt như thế, cuối cùng với hợp lực $\vec{R}$ của hệ ta có:

$$m_o(\vec{R}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) + \dots + m_o(\vec{F}_n) = \Sigma m_o(\vec{F})$$

Định lý đã được chứng minh.

Qua định lý này ta thấy rõ sau này khi cần tìm mô men của một hệ lực đối với một điểm nào đó chỉ cần tìm mô men hợp lực của hệ đối với điểm đó hoặc ngược lại.

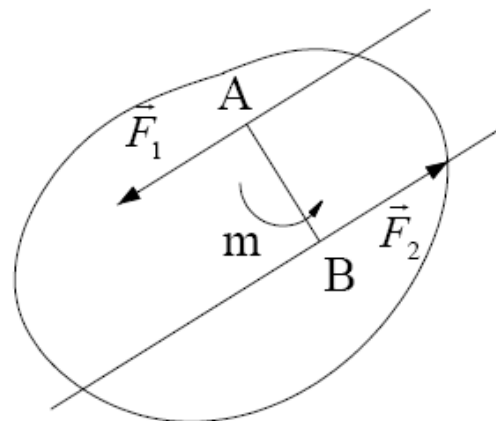
1.4.3. Ngẫu lực

1.4.3.1. Khái niệm

Định nghĩa: Ngẫu lực là hệ lực gồm hai lực song song ngược chiều, có cùng cường độ và không cùng đường tác dụng. Ký hiệu của ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F})$. Khoảng cách giữa hai đường tác dụng của hai lực thành phần gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực (hình 1.19).

Các đặc trưng: Ngẫu lực được đặc trưng bởi 3 yếu tố:

- Mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực: Là mặt phẳng chứa hai lực thành phần. Ngẫu lực làm



Trần Chí Thành

Hình 1.19. Ngẫu lực

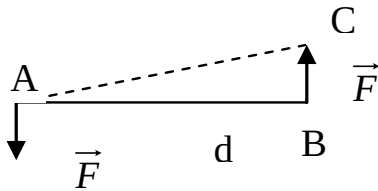
cho vật quay quanh trục thẳng góc với mặt phẳng tác dụng của nó.

- Chiều quay của ngẫu lực: Là chiều quay của vật dưới tác dụng của ngẫu lực trong mặt phẳng. Chiều quay của ngẫu lực biết được bằng cách đi vòng từ lực này đến lực kia theo chiều của lực.

- Cường độ tác dụng của ngẫu lực.

Cường độ tác dụng của ngẫu lực phụ thuộc vào giá trị của lực thành phần và tay đòn ngẫu lực.

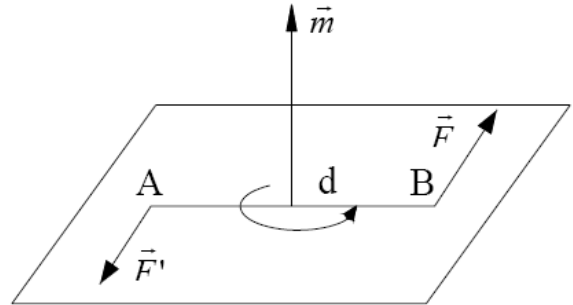
1.4.3.2. Mô men của ngẫu lực



Hình 1.20

Tích số giữa lực và cánh tay đòn còn được gọi là trị số mômen của ngẫu lực, ký hiệu m . Và $m = F.d$. Trị số mômen biểu diễn cho cường độ của ngẫu lực. Nhìn hình vẽ 1.20 ta thấy trị số tuyệt đối của mômen ngẫu lực bằng hai lần diện tích tam giác lập bởi một lực của ngẫu lực và điểm đặt của lực kia. $|m| = 2S(\triangle ABC)$

Như vậy để biểu diễn các đặc trưng của ngẫu lực, người ta dùng vectơ mômen ngẫu lực, ký hiệu $\vec{m}$, có gốc tại mặt phẳng ngẫu lực, hướng vuông góc với mặt phẳng ngẫu lực sao cho khi nhìn từ đầu mút của vectơ ấy xuống mặt phẳng ngẫu lực thấy chiều quay của ngẫu lực ngược chiều quay kim đồng hồ và có môđun bằng mômen ngẫu lực, tức bằng $F.d$ (hình 1.21)



Hình 1.21. Vectơ mômen ngẫu lực

1.4.3.3. Các tính chất cơ bản

a. Định lý 1.

Tổng đại số mômen của hai lực hợp thành một ngẫu lực đối với các điểm bất kỳ trên vật là một đại lượng không đổi và bằng mômen của ngẫu lực đó.

Chứng minh: Thật vậy, chẳng hạn đối với điểm O bất kỳ trên mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực (hình 1.22), ta có:

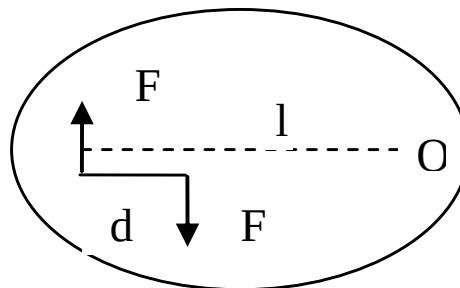
$$m_O(\vec{F}) = -F.l + F(l - d)$$

$$= - F.d = m$$

Định lý đã được chứng minh.

b. **Định lý 2.** (Sự tương đương của các ngẫu lực)

Hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng có trị số mômen bằng nhau và có cùng chiều quay thì tương đương (không chứng minh)



Hình 1.22

Hệ quả 1: Tác dụng của một ngẫu lực không thay đổi khi ta di chuyển nó đến một vị trí bất kỳ trên mặt phẳng tác dụng của nó (vì di chuyển như vậy thì chiều quay và trị số mômen của nó vẫn giữ nguyên)

Hệ quả 2: Một ngẫu lực đã cho có thể biến đổi thành ngẫu lực có lực và cánh tay đòn khác, miễn là mômen vẫn không đổi.

Như vậy rõ ràng việc xác định một ngẫu lực vai trò quan trọng không phải là lực (lực có thể biến đổi tùy ý) mà là tích số giữa lực và cánh tay đòn, tức là mômen của ngẫu lực. Người ta thường áp dụng hệ quả này để biến đổi nhiều ngẫu lực khác nhau thành những ngẫu lực cùng chung một cánh tay đòn.

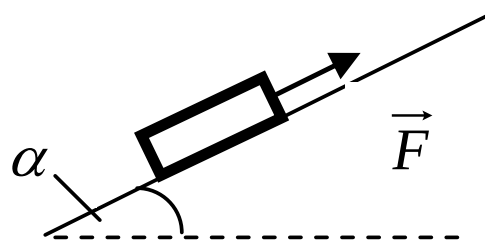
CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Tình học nghiên cứu những vấn đề gì?
2. Tại sao ta lại coi các vật rắn là rắn tuyệt đối? Khi nào vật rắn tuyệt đối được coi là cân bằng?
3. Lực là gì? Các yếu tố để xác định một lực? Cách biểu diễn một vectơ lực.
4. Hai hệ lực như thế nào thì gọi là tương đương? Một lực tương đương với một hệ lực thì lực đó được gọi là gì?
5. Điều kiện để hai lực tác dụng vào một vật rắn được cân bằng?
6. Tại sao ta có thể coi vectơ lực là một vectơ trượt?

7. Thêm hay bớt các lực cân bằng tác dụng vào một vật thì tác dụng cơ học của vật đó có thay đổi không? Tại sao?
8. Vật như thế nào gọi là bị liên kết? Nói rõ các loại liên kết thường gặp, các phản lực của nó.
9. Trình bày các nguyên lý tĩnh học.
10. Định nghĩa mômen của lực đối với một điểm. Đơn vị của mômen.
11. Phát biểu định lý Va-ri-nhông về mômen của một hợp lực đối với một điểm. Ý nghĩa và ứng dụng.
12. Định nghĩa về ngẫu lực, mômen của nó. Phân biệt mômen ngẫu lực với mômen của lực đối với một điểm.
13. Nêu rõ các tính chất cơ bản của ngẫu lực. Ứng dụng.
14. Nói rõ cách xác định hệ lực tác dụng lên một vật cân bằng. Xác định hệ lực tác dụng này nhằm mục đích gì?

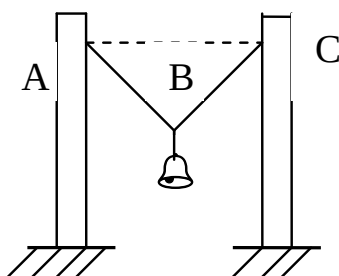
BÀI TẬP

1. Một vật nặng có khối lượng m được đặt nằm yên trên mặt phẳng nhẵn (coi như không ma sát) nghiêng nhờ lực $\vec{F}$ song song với mặt phẳng nghiêng đó (hình 1.23). Tìm hệ lực tác dụng lên vật đó.



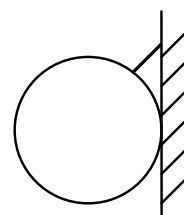
Hình 1.23

2. Một cái chuông khối lượng m được treo bởi 2 dây vào hai cột thẳng đứng (hình 1.24). Tìm hệ lực tác dụng lên nút B.



Hình 1.24

3. Trên tường nhẵn, thẳng đứng treo một quả cầu đồng chất nặng P nhờ dây treo tạo với tường một góc. Xác

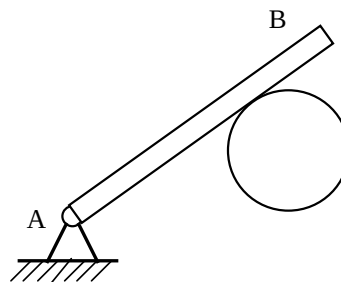


Hình 1.25

định hệ lực tác dụng vào quả cầu cân bằng (hình 1.25)

4. Thanh AB có khối lượng m bị liên kết bởi bản lề cố định A và hình trụ tròn như hình vẽ 1.26.

Tìm hệ lực tác dụng lên thanh AB.



Hình 1.26

HẾT CHƯƠNG 1

Chương 2.

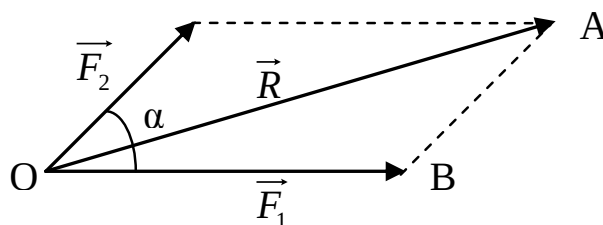
HỆ LỰC CÂN BẰNG - TÍNH TOÁN PHẢN LỰC LIÊN KẾT

2.1. CÁC PHÉP TÓÁN CƠ BẢN VỀ LỰC VÀ HỆ LỰC

2.1.1. Phép cộng các lực

2.1.1.1. Quy tắc hình bình hành lực

Giả sử có hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đồng quy tại một điểm O. Theo nguyên lý hình bình hành lực, chúng có hợp lực là $\vec{R}$. Hợp lực này đặt



Hình 2.1

ngay tại O và được xác định bởi đường chéo của hình bình hành có hai cạnh là hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ (hình 2.1)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2-1)$$

Công thức này biểu diễn hợp lực được xác định bằng cách cộng véc-tơ, tức là nó chỉ rõ phương của hợp lực là phương của đường chéo hình bình hành lực, độ dài của đường chéo là trị số của hợp lực theo tỷ lệ đã chọn.

Để xác định cụ thể bằng số trị số của hợp lực, ta có thể áp dụng các hệ thức trong tam giác lượng. Xét tam giác thường OAB (hình 2.1) ta có:

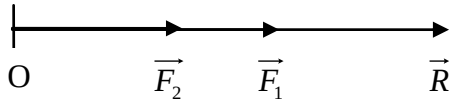
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha), \text{ nhưng } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \text{ nên:}$$

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha$. Vậy, trị số của hợp lực $\vec{R}$ được xác định bằng công thức:

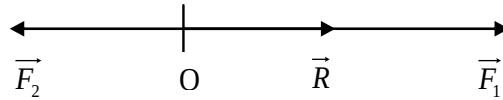
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2-2)$$

2.1.1.2. Các trường hợp đặc biệt

- a. Nếu hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng phương, chiều (hình 2.2) thì khi đó $\alpha = 0$;
 $\cos \alpha = 1$



Hình 2.2



Hình 2.3

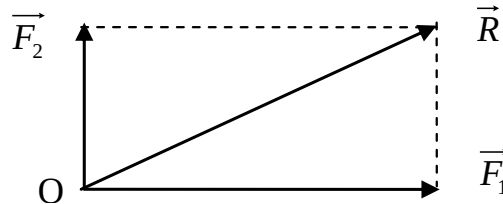
Hợp lực $\vec{R}$ sẽ có trị số bằng:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = F_1 + F_2$$

- b. Nếu hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng phương, ngược chiều (hình 2.3), khi đó $\alpha = 180^\circ$; $\cos \alpha = -1$, hợp lực $\vec{R}$ sẽ có trị số bằng:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = |F_1 - F_2|$$

- c. Nếu hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ thẳng góc với nhau (hình 2.4), khi đó $\alpha = 90^\circ$;

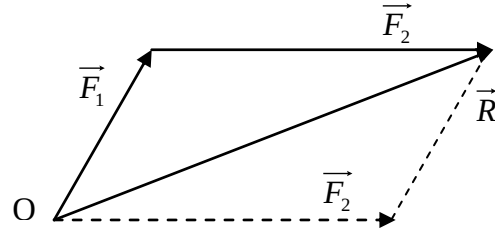


Hình 2.4

$\cos \alpha = 0$, hợp lực $\vec{R}$ sẽ có trị số bằng: $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

2.1.1.3. Quy tắc đa giác lực

Nếu có hai lực đồng quy ngoài quy tắc hình bình hành lực đã trình bày ở trên ta còn nhận thấy để xác định được hợp lực $\vec{R}$ không nhất thiết phải vẽ cả hình bình hành lực, mà chỉ cần từ mút của $\vec{F}_1$ ta đặt nối tiếp vectơ song song và bằng $\vec{F}_2$



Hình 2.5

(vectơ này cũng ký hiệu là $\vec{F}_2$ (hình 2-5), sau đó ta vẽ $\vec{R}$ là vectơ có gốc và mút là gốc và mút của đường gãy khúc $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Rõ ràng ta vẫn được:

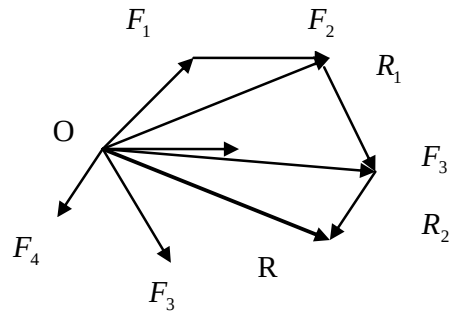
$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Đường gãy khúc trong đó các lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đặt nối tiếp nhau gọi là *tam giác lực* và ta nói, vectơ hợp lực $\vec{R}$ đóng kín tam giác lực lập bởi các lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.

Quy tắc này được gọi là quy tắc tam giác lực, dùng nó rất tiện lợi sau này.

Nếu có nhiều lực phẳng đồng quy, giả sử có 4 lực phẳng đồng quy $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ chẳng hạn (hình 2.6). Ta cho lần lượt:

- Đầu tiên $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cho ta hợp lực $\vec{R}_1$ đặt tại O:

$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Vectơ $\vec{R}_1$ đóng kín đường gãy khúc lập bởi $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.



Hình 2.6

- Hợp $\vec{R}_1$ và $\vec{F}_3$ ta được $\vec{R}_2$ cũng đặt tại O

$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. $\vec{R}_2$ đóng kín đường gãy khúc lập bởi $\vec{R}_1$ và $\vec{F}_3$, tức là cũng đóng kín đường gãy khúc lập bởi $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và $\vec{F}_3$.

- Cuối cùng hợp lực $\vec{R}_2$ và $\vec{F}_4$ ta được hợp lực $\vec{R}$ đặt tại O:

$\vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$, hay gọn hơn:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad (2-3)$$

(Dấu $\sum$ đọc là xích ma, ký hiệu của một tổng trong toán học). Véc tơ $\vec{R}$ đóng kín đường gãy khúc lập bởi $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ và $\vec{F}_4$. Đường gãy khúc trong đó các lực đặt nối tiếp nhau (thứ tự nút lực này trùng gốc lực kia) gọi là *đa giác lực*.

Vậy: *Hợp hệ lực phẳng đồng quy thì được một hợp lực. Hợp lực có điểm đặt là điểm đồng quy và được xác định bằng véc tơ đóng kín đa giác lực lập bởi các lực đồng quy đó.* Quy tắc này được gọi là quy tắc đa giác lực.

2.1.1.4. Hợp hai lực song song

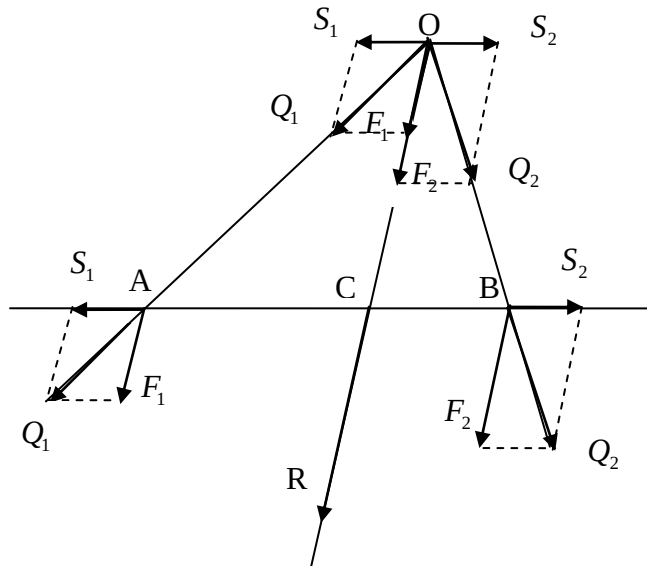
+ Hợp hai lực song song cùng chiều:

Giả sử xét một vật rắn chịu tác dụng của hai lực song song cùng chiều $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đặt tại A và B (hình 2.7). Ta cần tìm hợp lực của chúng.

Muốn vậy, ta biến hệ lực song song này thành hệ đồng quy bằng cách đặt vào A và B hai lực cân bằng $\vec{S}_1$ và $\vec{S}_2$ nằm trên phương AB. Theo nguyên lý thêm và bớt các lực cân bằng, tác dụng của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ vẫn không thay đổi, tức là: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv (\vec{S}_1, \vec{F}_1, \vec{S}_2, \vec{F}_2)$

Hợp lần lượt từng cặp lực đồng quy tại A và B được:

$$\vec{S}_1 + \vec{F}_1 = \vec{Q}_1 \quad \text{và} \quad \vec{S}_2 + \vec{F}_2 = \vec{Q}_2$$



Hình 2.7

Như vậy, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$. Hai lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ không song song, trượt chúng đến điểm đồng quy O, và phân ra các thành phần như lúc đầu. $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cho ta hợp lực $\vec{R}$ cùng chiều với chúng: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Còn $\vec{S}_1$ và $\vec{S}_2$ cân bằng lẫn nhau, ta có thể bỏ đi. Do đó:

$$(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \equiv \vec{R}, \text{ như thế: } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{R}$$

Tức là, hai lực song song cùng chiều có một hợp lực $\vec{R}$ song song cùng chiều với chúng, và có trị số:

$$R = F_1 + F_2 \quad (2-4)$$

Trượt $\vec{R}$ trên đường tác dụng của nó đến điểm C nằm trên đường AB. Ta cần xác định vị trí điểm đặt C này của hợp lực $\vec{R}$.

Do các tam giác đồng dạng OAC và OAB, OCB và OAB ta có:

$$\frac{CA}{CO} = \frac{S_1}{F_1} \quad (a) \quad \text{và} \quad \frac{CB}{CO} = \frac{S_2}{F_2} \quad (b). \text{ Chia (a) cho (b) với chú ý } S_1 = S_2, \text{ ta được:}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1} \quad (2-5)$$

Hai đẳng thức (2-4) và (2-5) cho ta xác định hợp của hai lực song song cùng chiều. Vậy: “Hợp hai lực song song cùng chiều tác dụng lên một vật rắn sẽ được một hợp lực song song và cùng chiều với hai lực, có trị số bằng tổng trị số của hai lực và đặt tại điểm C chia trong khoảng cách giữa đường tác dụng của hai lực đã cho thành hai đoạn tỷ lệ nghịch với trị số của hai lực ấy”

Nhận xét: Ta thấy đường tác dụng của hợp lực nằm trong khoảng đường tác dụng của hai lực đã cho và ở gần lực có trị số lớn hơn. Do tính chất của tỷ lệ thức ta có thể viết (2-5) dưới dạng khác:

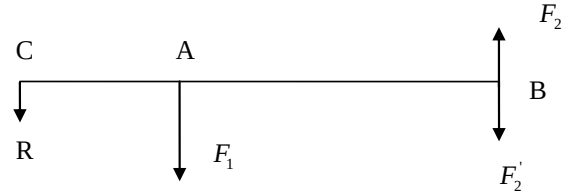
$$\frac{CA}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{CA+CB}{F_2+F_1}, \text{ tức là: } \frac{CA}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R} \quad (2-6)$$

+ Hợp hai lực song song ngược chiều:

Giả sử có hai lực song song ngược chiều

$\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ ($F_1 > F_2$) đặt tại A và B, ta cần tìm hợp lực của chúng (hình 2.8)

Muốn vậy, ta thay thế lực $\vec{F}_1$ bằng hai lực khác song song cùng chiều tương đương với nó: Lực $\vec{F}_2'$ đặt tại B trực đối



Hình 2.8

với $\vec{F}_2$ và lực $\vec{R}$ đặt tại một điểm C nào đó. Như thế : $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv (\vec{R}, \vec{F}_2', \vec{F}_2)$. Nhưng $\vec{F}_2'$ và $\vec{F}_2$ cân bằng lẫn nhau (trực đối), có thể bỏ đi. Do đó, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{R}$. $\vec{R}$ xác định như trên chính là hợp lực của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy xác định trị số và điểm đặt C của hợp lực $\vec{R}$. Do $\vec{F}_1$ phân ra hai lực song song cùng chiều $\vec{F}_2'$ và $\vec{R}$, nên theo (2-4) ta có: $F_1 = F_2' + R = F_2 + R$. Vì thế:

$$R = F_1 - F_2 \quad (2-7)$$

và theo (2-5) ta có: $\frac{AC}{AB} = \frac{F_2'}{R} = \frac{F_2}{R}$. Do tính chất của tỷ lệ thức, ta có thể viết:

$$\frac{AC}{AB+AC} = \frac{F_2}{R+F_2}, \text{ hay: } \frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1} \quad (2-8)$$

Hai đẳng thức (2-7) và (2-8) cho ta xác định hợp lực của hai lực song song ngược chiều. Vậy: “*Hợp hai lực song song ngược chiều thì được một lực song song cùng chiều với lực lớn, có trị số bằng hiệu của trị số hai lực và đặt tại điểm C chia ngoài khoảng cách giữa hai đường tác dụng của hai lực đã cho thành hai đoạn tỷ lệ nghịch với trị số các lực*”

Nhận xét: Ta thấy đường tác dụng của hợp lực nằm ngoài khoảng của hai đường tác dụng của hai lực đã cho và ở gần lực có trị số lớn. Do tính chất của tỷ lệ thức, ta còn có thể viết (2-8) dưới một dạng khác:

$$\frac{CA}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{CB-CA}{F_1-F_2} \text{ tức là: } \frac{CA}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R} \quad (2-9)$$

Trường hợp đặc biệt: Nếu $F_1 = F_2$ thì

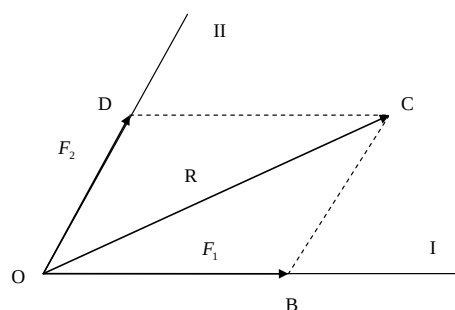
$R = F_1 - F_2 = 0$ ta có một ngẫu lực.

2.1.2. Cách phân tích một lực thành hai lực thành phần

2.1.2.1. Phân tích một lực thành hai lực đồng quy

Trong thực tế đôi khi ta gặp những bài toán ngược lại: Biết lực $\vec{R}$ và cần phân tích lực đó ra hai lực thành phần $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có phương I và II cho biết (hình 2.9)

Muốn thế, từ mút C của lực $\vec{R}$ ta kẻ hai đường thẳng song song với hai phương I và II, lần lượt cắt chúng ở B và D và được hai vectơ $\vec{OB}$ và $\vec{OD}$.



Hình 2.9

Các vectơ đó xác định hai lực thành phần $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ mà ta cần tìm.

Thật vậy, theo nguyên lý hình bình hành lực, nếu hợp hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ ta lại được lực $\vec{R}$ ban đầu: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$

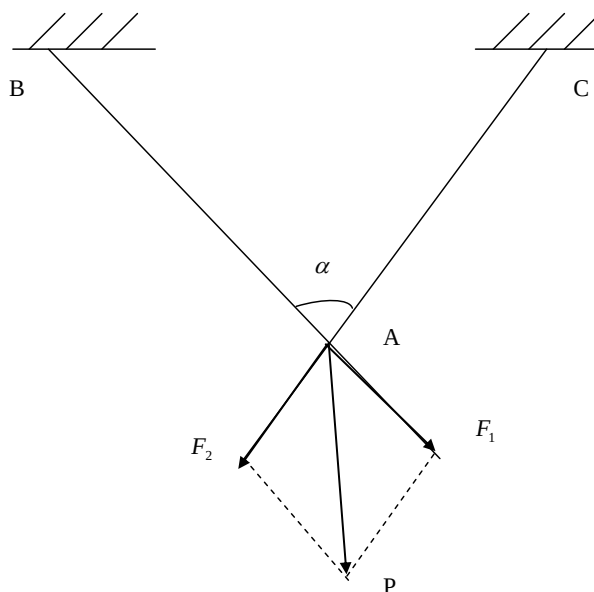
Ví dụ 2-1. Một vật có khối lượng $m = 30$ kg treo trên hai sợi dây đối xứng với phương thẳng đứng và hợp với nhau một góc $\alpha = 60^\circ$ (hình 2.10). Hãy xác định lực tác dụng lên mỗi dây.

Bài giải

Trọng lực $\vec{P}$ của vật hướng theo phương thẳng đứng xuống dưới. Ta phân $\vec{P}$ làm hai thành phần $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ nằm trên phương các sợi dây AB và AC. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ chính là các lực thành phần mà vật nặng tác dụng lên mỗi dây đó.

Theo công thức (2-2):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 60^\circ}$$



Hình 2.10

Vì vật P treo đối xứng với hai dây nên $F_1 = F_2 = F$.

Do đó,

$$P = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2 \cdot \frac{1}{2}} = F \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{Hay : } F = \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{P\sqrt{3}}{3}$$

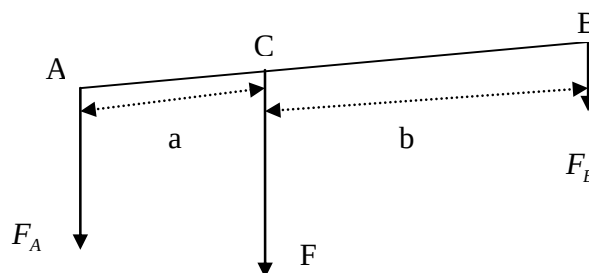
Mà $P = mg = 30 \cdot 10 = 300 \text{ N}$

Do đó:

$$F = \frac{300\sqrt{3}}{3} = 100 \sqrt{3} = 173,2 \text{ N}$$

2.1.2.2. Phân tích một lực thành hai lực song song cùng chiều

Giả sử có một lực $\vec{F}$, cần phải phân tích thành hai lực song song $\vec{F}_A$ và $\vec{F}_B$ đặt tại A và B cùng chiều (hình 2.11).



Hình 2.11

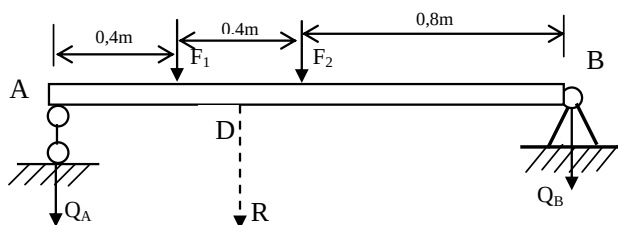
Muốn vậy, ta nối A với B, nó cắt đường tác dụng của lực $\vec{F}$ ở điểm C. Gọi $CA = a$, $CB = b$ và $AB = l$. Do biểu thức (2-6) ta có: $\frac{b}{F_A} = \frac{l}{F}$. Do đó, $F_A = F \cdot \frac{b}{l}$.

Tương tự, ta có: $F_B = F \cdot \frac{a}{l}$. Đặc biệt, nếu $a = b$ thì $F_A = F_B$.

Ví dụ 2-2. Tìm áp lực thẳng đứng của dầm lên các gối đỡ A và B. Dầm chịu tác dụng của các tải trọng $F_1 = F_2 = 800 \text{ N}$. Bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm. Các kích thước cho trên hình 2.12.

Bài giải:

Trước hết hợp $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ ta được $\vec{R}$ có trị số $R = F_1 + F_2 = 800 + 800 = 1600 \text{ N}$ đặt tại điểm D ở chính giữa



Hình 2.12

đoạn nối hai điểm đặt của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Ta chỉ cần phân $\vec{R}$ ra hai thành phần $\vec{Q}_A$ đặt tại A và $\vec{Q}_B$ đặt tại B của dầm.

Từ biểu thức (2-6) ta có:

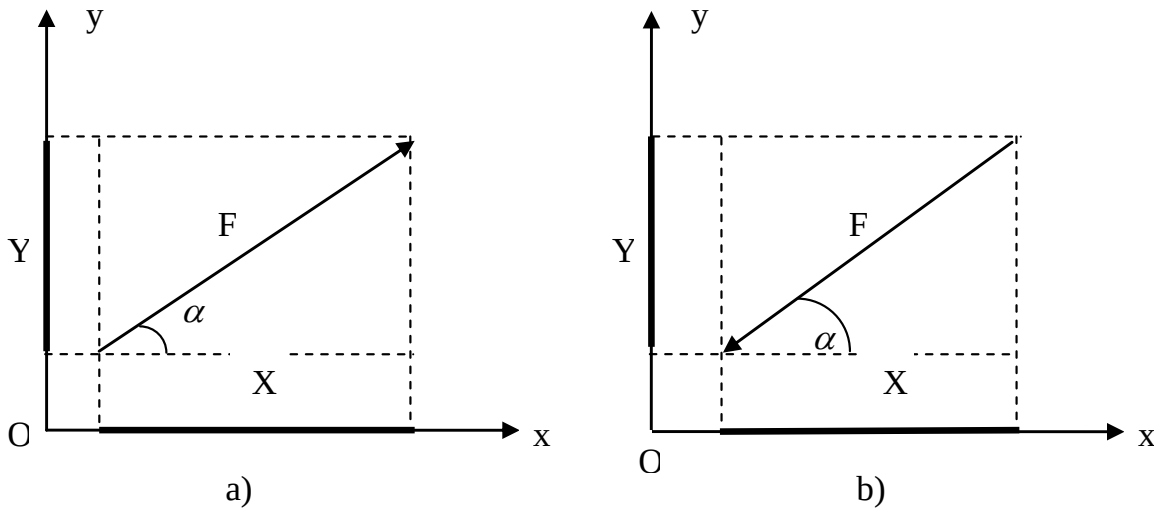
$$\frac{DB}{Q_A} = \frac{AB}{R}. \text{ Do đó : } Q_A = R \cdot \frac{DB}{AB} = 1600 \cdot \frac{1}{1,6} = 1.000 \text{ N, và } \frac{DA}{Q_B} = \frac{AB}{R}. \text{ Do đó : } Q_B = R \cdot \frac{DA}{AB} = 1600 \cdot \frac{0,6}{1,6} = 600 \text{ N. Kiểm tra lại ta thấy đúng là: } R = Q_A + Q_B = 1600 \text{ N.}$$

Vậy áp lực của dầm lên gối đỡ A và B lần lượt là 1000 N và 600 N.

2.1.2.3. Phép chiếu một lực lên hệ trục tọa độ vuông góc

Tất cả những vấn đề hợp lực của vật rắn dưới tác dụng của các lực đều có thể dùng cách chiếu các lực đó lên một hệ trục vuông góc rồi lập những công thức tổng quát. Phương pháp này còn được gọi là phương pháp giải tích.

Chiếu một lực lên hai trục



Hình 2.13

Giả sử ta có lực $\vec{F}$ hợp với trục x một góc nhọn α (hình 2-13). Gọi X và Y là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên trục x và y, ta có:

$$X = \pm F \cos \alpha \quad (2-10)$$

$$Y = \pm F \sin \alpha \quad (2-11)$$

Trong đó α là góc nhọn hợp bởi phương của lực với chiều của trục x.

Trong các biểu thức trên ta sẽ lấy dấu cộng (+) khi đi theo chiều dương của trục, thì ta lần lượt gặp hình chiếu gốc rồi đến hình chiếu mút của lực (hình 2.13-a) và lấy dấu trừ (-) khi ngược lại (hình 2.13-b).

Dấu của các hình chiếu cũng còn có thể xác định bằng cách khác.

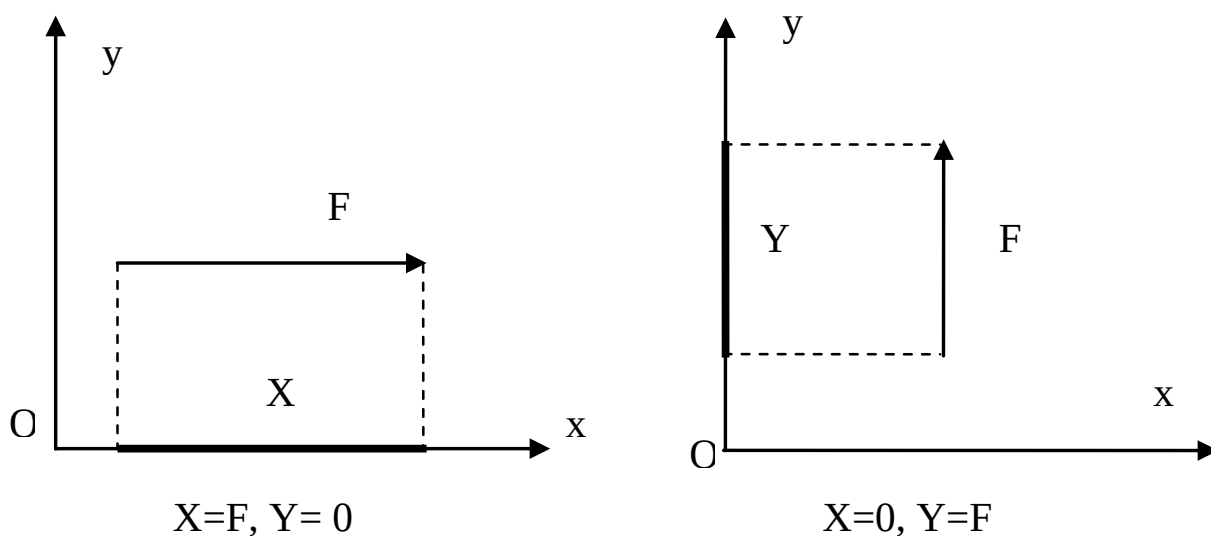
Nếu góc giữa phương của lực và chiều dương của trục đã cho là góc nhọn thì hình chiếu của lực trên trục đó là dương. Nếu góc giữa phương của lực và chiều âm của trục đã cho là nhọn thì hình chiếu của lực trên trục đó là âm.

Trường hợp lực song song với trục thì hình chiếu của lực lên trục đó bằng trị số lực và lấy dấu cộng hay trừ tùy theo góc giữa phương của lực với chiều dương của trục là 0° hay 180° . Nếu lực thẳng góc với trục thì hình chiếu của nó lên trục bằng không (0) (hình 2.14)

Mặt khác, nếu biết hai hình chiếu X và Y của lực $\vec{F}$ (hình 2.15) trên hai trục, ta cũng có thể xác định lực $\vec{F}$ một cách dễ dàng.

$$\text{Về trị số} \quad F = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2-12)$$

$$\text{Về phương chiều:} \quad \cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \sin \alpha = \frac{Y}{F} \quad (2-13)$$



Hình 2.14

Ví dụ 2-3. Xác định hình chiếu của lực $F = 500 \text{ N}$ lên một hệ trục vuông góc xOy trong hai trường hợp như hình vẽ 2.13a và 2.13b. Cho biết góc $\alpha = 30^\circ$.

Bài giải

- 1) Khi lực $\vec{F}$ đặt như hình vẽ 2.13a: Theo các công thức (2-10) và (2-11) ta có hình chiếu của nó lên hai trục là:

$$X = F \cos \alpha = 500 \cdot \cos 30^\circ \approx 500 \cdot 0,866 \approx 433 \text{ N}$$

$$Y = F \sin \alpha = 500 \cdot \sin 30^\circ = 500 \cdot 0,5 = 250 \text{ N}$$

- 2) Khi lực $\vec{F}$ đặt như hình vẽ 2.13b, cũng theo các công thức (2-10) và (2-11) ta có hình chiếu của nó lên hai trục là:

$$X = -F \cos \alpha = -500 \cdot \cos 30^\circ \approx -500 \cdot 0,866 \approx -433 \text{ N}$$

$$Y = -F \sin \alpha = -500 \cdot \sin 30^\circ = -500 \cdot 0,5 = -250 \text{ N}$$

Ví dụ 2-4.

Một gối đỡ bản lề cố định (hình 2.15) có hai thành phần phản lực đã được xác định:

$$X = 600 \text{ N}, Y = 800 \text{ N}.$$

Hãy xác định phản lực $\vec{R}$ của gối đỡ.

Bài giải

Gọi $\vec{R}$ là phản lực của gối đỡ, nó có hai hình chiếu X và Y đã biết. Theo các công thức (2-12) và (2-13) ta xác định được :

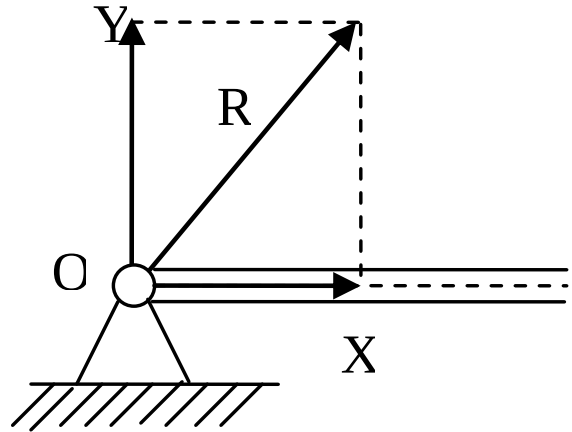
Trị số của phản lực R bằng :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{600^2 + 800^2} = 1000 \text{ N}$$

Phương chiều của phản lực R là:

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = \frac{600}{1000} = 0,6$$

$$\sin \alpha = \frac{Y}{R} = \frac{800}{1000} = 0,8 .$$



Hình 2.15

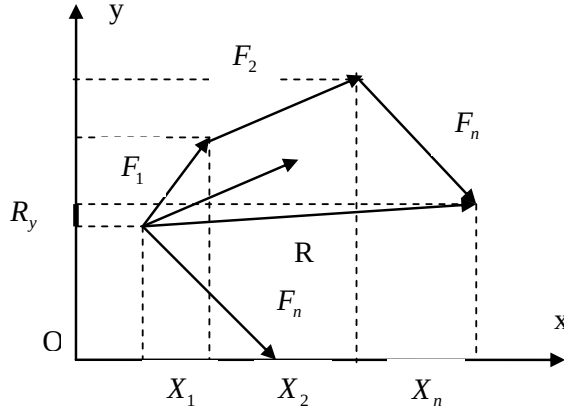
Tra bảng hoặc giải ra được $\alpha = 53^0$.

a) Xác định hợp lực của một hệ lực phẳng đồng quy

Giả sử ta có hệ lực phẳng đồng quy $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ (hình 2.16), Từ quy tắc đa giác lực ta biết hệ lực này có một hợp lực $\vec{R}$ đặt tại điểm đồng quy, có véctơ bằng tổng hình học các véctơ thành phần:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

Nhưng theo định lý hình chiếu: “*Hình chiếu của véctơ tổng hợp bằng tổng đại số hình chiếu các véctơ thành phần* »



Hình 2.16

Nếu ta gọi hình chiếu của các lực thành phần $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ là $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n$ thì các hình chiếu R_x, R_y lên các trục bằng :

$$R_x = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X \quad (2-14)$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y \quad (2-15)$$

Hai biểu thức này cho phép ta xác định được hình chiếu của hợp lực theo hình chiếu của các lực thành phần.

Xác định được hình chiếu của hợp lực, kết hợp với các công thức (2-12) và (2-13) ta có thể xác định được véctơ hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực phẳng đồng quy một cách dễ dàng.

$$\text{Về trị số : } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \quad (2-16)$$

Về phương chiều :

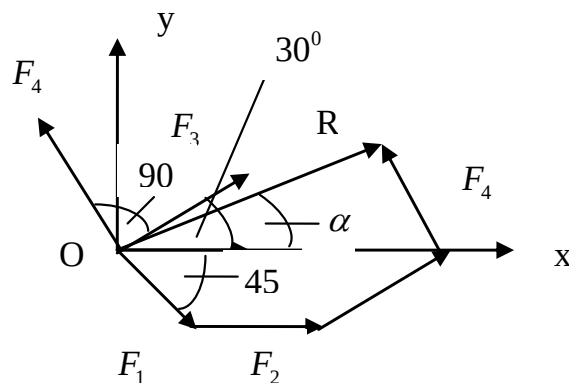
$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{\sum X}{R} \quad \text{và} \quad \sin \alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{\sum Y}{R} \quad (2-17)$$

Ví dụ 2.5

Cho một hệ lực phẳng đồng quy sắp xếp như hình vẽ 2.17, có : $F_1 = 350$ N, $F_2 = 400$ N, $F_3 = 300$ N, $F_4 = 400$ N. Xác định trị số và phương chiều của hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực đó.

Bài giải

Lập bảng hình chiếu của các lực lên hệ trục xOy



Hình 2.17

Bảng 2.1. Hình chiếu của các lực

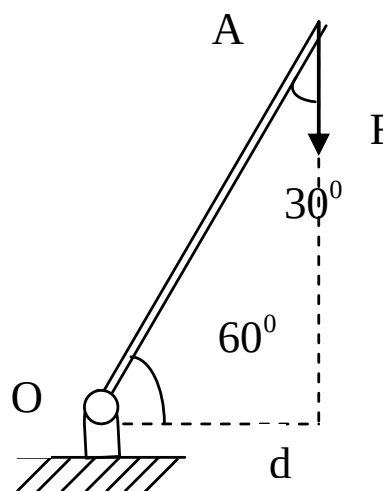
Lực	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_3$	$\vec{F}_4$
Hình chiếu				
X	$F_1 \cos 45^\circ$	F_2	$F_3 \cos 30^\circ$	$-F_4 \cos 60^\circ$
Y	$-F_1 \sin 45^\circ$	0	$F_3 \sin 30^\circ$	$F_4 \sin 60^\circ$

$$\text{Ta có : } \sum X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = F_1 \cos 45^\circ + F_2 + F_3 \cos 30^\circ - F_4 \cos 60^\circ$$

$$= 350 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 400 + 300 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 400 \cdot \frac{1}{2} \approx 708 \text{ N}$$

$$\sum Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = -F_1 \sin 45^\circ + 0 + F_3 \sin 30^\circ + F_4 \sin 60^\circ = -350 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + 300 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 248 \text{ N}$$



Hình 2.18

Do đó hợp lực R có trị số: $R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \approx \sqrt{708^2 + 248^2} \approx 750 \text{ N}$

Và phương xác định bởi :

$$\cos \alpha = \frac{\sum X}{R} = \frac{708}{750} \approx 0,940 ; \sin \alpha = \frac{\sum Y}{R} = \frac{248}{750} \approx 0,331, \text{ hay } \alpha \approx 20^\circ$$

2.1.3. Cách tính mômen của một lực

2.1.3.1. Mômen của một lực đối với một điểm

Theo định nghĩa, công thức (1-1) : $M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot d$

Ví dụ 2.6

Lực $F = 500 \text{ N}$ tác dụng vào thanh OA tại A, thanh dài 0,2 m quay quanh điểm O. Lực F tạo với thanh một góc 30° , thanh OA tạo với phương nằm ngang một góc 60° . Xác định mômen quay quanh điểm O (hình 2.18).

Bài giải

Theo định nghĩa, $M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot d$

Trong đó theo bài ra, xác định d như sau :

$$d = 0,2 \text{ m} \cdot \cos 60^\circ = 0,1 \text{ m}$$

Mômen của lực quanh O là : $M_o(\vec{F}) = - F \cdot d$

$$= - (500 \text{ N}) \cdot (0,1 \text{ m}) = - 50 \text{ Nm}$$

Lực có xu hướng làm thanh quay quanh O theo chiều kim đồng hồ nên mang dấu âm (-)

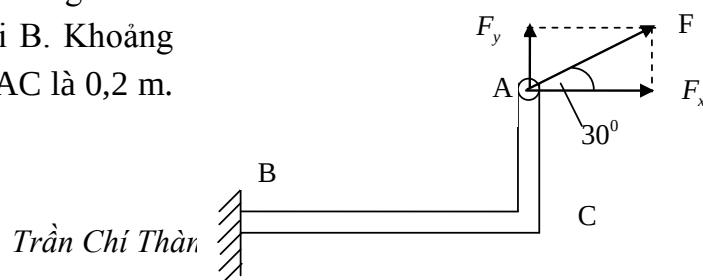
2.1.3.2. Mômen của hợp lực đối với một điểm

Theo Định lý Va-ri-nhông : Mômen của hợp lực của một hệ lực phẳng đối với một điểm bất kỳ bằng tổng đại số mômen của các lực thành phần đối với điểm ấy. Công thức (1-2) :

$$m_o(\vec{R}) = \sum m_o(\vec{F})$$

Ví dụ 2.7

Cho lực $F = 500 \text{ N}$, đặt tại A trong thanh ACB vuông góc tại C, ngàm tại B. Khoảng cách BC là 0,4 m, khoảng cách AC là 0,2 m.



Hình 2.19

Góc tạo bởi lực F và phương nằm ngang là 30° . Xác định mômen của lực F quanh điểm B (hình 2.19).

Bài giải

Theo Định lý Va-ri – nhông, ta tách lực F ra hai thành phần F_x và F_y có phương, chiều như hình vẽ, sau đó tính mômen của hai lực thành phần này thay vì tính mômen cho lực F .

Về trị số: $F_x = F \cdot \cos 30^\circ$, $F_y = F \cdot \sin 30^\circ$

$$F_x = 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 433 \text{ (N)} ; F_y = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \text{ (N)}$$

Theo chiều tác động của các lực thành phần ta có :

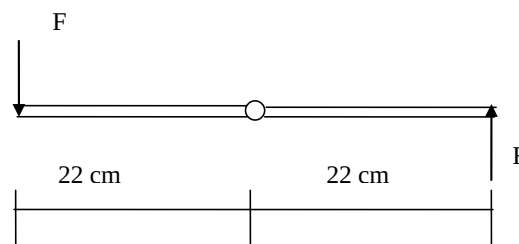
$$M_B(F) = M_B(F_y) - M_B(F_x) = 250 \cdot 0,4 - 433 \cdot 0,2 = 100 - 86,6 = + 13,4 \text{ Nm}$$

2.1.3.3. Mômen của một ngẫu lực

Theo định nghĩa, $m = F \cdot d$

Ví dụ 2.8

Xác định mô men của một ngẫu lực cho trên hình vẽ 2.20. Biết trị số của lực F là 180 N.



Hình 2.20

Bài giải

Khoảng cách thẳng góc giữa hai lực là:

$$d = 22 \text{ cm} + 22 \text{ cm} = 44 \text{ cm}$$

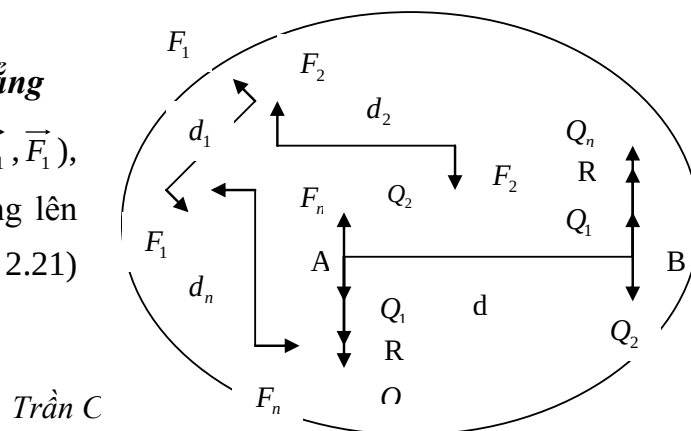
Theo định nghĩa, mômen của một ngẫu lực là:

$$m = F \cdot d = 180 \times 44 = 7920 \text{ Ncm}$$

Ngẫu lực này tạo ra một mômen ngược chiều kim đồng hồ nên có dấu dương (+).

2.1.3.4. Hợp hệ ngẫu lực phẳng

Giả sử có hệ ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2) \dots (\vec{F}_n, \vec{F}_n)$ cùng tác dụng lên mặt phẳng của vật rắn A (hình 2.21)



Hình 2.21

lần lượt có mômen $m_1 = F_1 \cdot d_1$, $m_2 = F_2 \cdot d_2$..., $m_n = F_n \cdot d_n$.

Ta phải hợp hệ ngẫu lực này.

Muốn thế đưa các ngẫu lực này về cùng một cánh tay đòn tùy ý d đặt trên mặt phẳng tác dụng của chúng và được các ngẫu lực

$(\vec{Q}_1, \vec{Q}_1), (\vec{Q}_2, \vec{Q}_2), \dots, (\vec{Q}_n, \vec{Q}_n)$, với: $Q_1 \cdot d = m_1$; $-Q_2 \cdot d = m_2$, ...

$Q_n \cdot d = m_n$

Hợp các lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$ trên cùng một đường tác dụng đặt tại A và B ta được hai lực $\vec{R}$ có trị số:

$R = Q_1 - Q_2 + \dots + Q_n$.

Hai lực $\vec{R}$ đặt tại A và B này tạo thành một ngẫu lực tương đương với hệ ngẫu lực đã cho và gọi là hợp ngẫu lực của hệ.

Mômen của hợp ngẫu lực là: $M = R \cdot d$.

Thay trị số của R đã tìm được trên, ta có:

$M = (Q_1 - Q_2 + \dots + Q_n) \cdot d = Q_1 \cdot d - Q_2 \cdot d + \dots + Q_n \cdot d$

Hay: $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_i$ (2- 18)

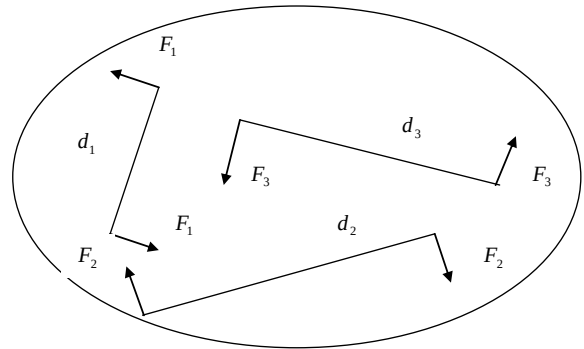
Vậy: “Hợp một hệ ngẫu lực được một ngẫu lực có mômen bằng tổng đại số mômen của các ngẫu lực đã cho”

Ví dụ 2.9

Cho 3 ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2)$ và $(\vec{F}_3, \vec{F}_3)$ có các lực tạo thành ngẫu lực $F_1 = 4$ N, $F_2 = 5$ N, $F_3 = 7$ N và các cánh tay đòn $d_1 = 0,6$ m, $d_2 = 0,8$ m, $d_3 = 0,3$ m (hình 2.22)

Tìm: 1) Mômen của hợp ngẫu lực

2) Lực $\vec{R}$ của hợp ngẫu lực bằng bao nhiêu, nếu cho biết cánh tay đòn của hợp ngẫu lực $d = 0,25$ m ?



Hình 2.22

Bài giải

1) Hợp ngẫu lực có mômen bằng:

$$M = \sum m = m_1 + m_2 + m_3 = F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 = 4 \times 0,6 - 5 \times 0,8 + 7 \times 0,3 = 0,5 \text{ Nm}$$

Như vậy thực chất chúng ta đã thay thế hệ ba ngẫu lực về tương đương với một ngẫu lực $(\vec{R}, \vec{R})$

2) Nếu cánh tay đòn của hợp ngẫu lực $d = 0,25 \text{ m}$ thì lực R sẽ bằng:

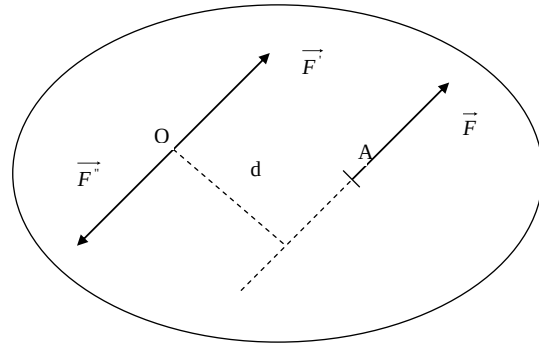
$$R = \frac{M}{d} = \frac{0,5}{0,25} = 2 \text{ N}$$

2.1.4. Phép dời lực

Để thu gọn một hệ lực phẳng bất kỳ ta sẽ dùng phương pháp dời các lực. Nguyên tắc dời lực dựa vào định lý sau:

Định lý: Một lực tương đương với lực bằng nó nhưng đặt tại điểm khác và một ngẫu lực phụ, có mômen bằng mômen của lực ấy lấy đối với điểm đặt của lực kia.

Chứng minh: Giả sử ta có một lực $\vec{F}$ đặt tại A. Lấy một điểm O bất kỳ trên vật ta đặt vào O hai lực cân bằng $\vec{F}'$ và $\vec{F}''$ cùng phương và cùng trị số với $\vec{F}$ (hình 2.23)



Hình 2.23

Theo nguyên lý thêm và bớt các lực cân bằng ta có: $\vec{F} \equiv (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$. Nhưng $\vec{F}$

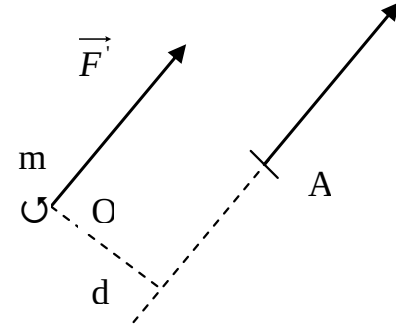
và $\vec{F}''$ song song, ngược chiều và bằng nhau nên lập thành một ngẫu lực, do đó:

$\vec{F} \equiv \vec{F}' + \text{ngẫu lực } (\vec{F}, \vec{F}'')$. Như vậy lực $\vec{F}$ tương đương với lực $\vec{F}'$ bằng nó về phương chiều, trị số và một ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}'')$. Ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}'')$ gọi là ngẫu lực phụ thêm vào, ta cần xác định mômen của ngẫu lực phụ này.

Theo định nghĩa mômen của ngẫu lực thì $m = F \cdot d$. Nhìn hình vẽ ta có: $m_0(\vec{F}) = F \cdot d$ (hai mômen này đều có dấu cộng). Vậy: $m = m_0(\vec{F})$. Mômen của ngẫu lực phụ bằng mômen của lực $\vec{F}$ lấy đối với điểm đặt của lực kia.

Định lý đã được chứng minh.

Nếu ta xem $\vec{F}'$ chính là lực $\vec{F}$ dời đến O thì định lý trên có thể phát biểu dưới dạng khác: “*Khi dời song song một lực đến điểm khác, để tác dụng cơ học không thay đổi ta phải thêm vào một ngẫu lực phụ có mômen bằng mômen của lực đối với điểm dời đến*”.



Hình 2.24

Định lý đảo:

Ta có thể thu gọn một lực và một ngẫu lực đã cho cùng tác dụng trên một mặt phẳng của vật về một lực duy nhất.

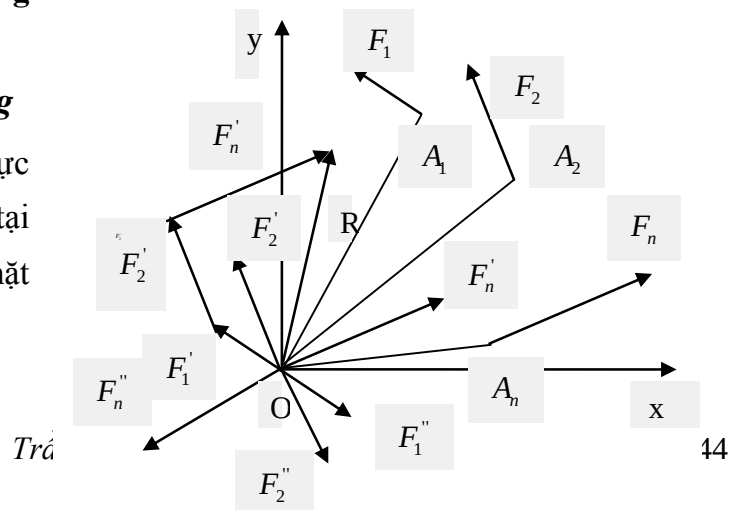
Thật vậy, giả sử có một lực $\vec{F}'$ đặt tại O và một ngẫu lực có mômen m cùng tác dụng trên một mặt phẳng của vật rắn, ta sẽ tìm được một lực $\vec{F}$ đặt tại A có phương chiều trị số tương đương với lực $\vec{F}'$ và cách đường tác dụng của lực $\vec{F}'$ một đoạn $d = \frac{m}{F'}$ về phía sao cho mômen của lực $\vec{F}$ đó đối với điểm O có cùng chiều quay với chiều quay của ngẫu lực (hình 2.24), vì theo định lý thuận, rõ ràng khi dời lực $\vec{F}$ về O ta lại được lực $\vec{F}'$ và ngẫu lực có mômen là m đã cho. Lực $\vec{F}$ tìm được như trên là duy nhất và chính là hợp lực của hệ lực $\vec{F}'$ và ngẫu lực có mômen là m đã cho.

Định lý đã được chứng minh.

2.1.5. Thu gọn hệ lực phẳng bất kỳ

2.1.5.1. Thu gọn hệ lực phẳng

Giả sử ta có một hệ lực phẳng bất kỳ ($\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$) đặt tại các điểm $A_1, A_2 \dots, A_n$ trên mặt



Hình 2.25

phẳng của vật rắn (hình 2.25). Vấn đề đặt ra là phải thu gọn hệ lực đó.

Muốn thế, ta chọn một điểm O bất kỳ trên mặt phẳng tác dụng của các lực rồi dời song song các lực đó về tâm O, gọi là tâm thu gọn.

Theo định lý dời lực ta được:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1' + \text{ngẫu lực phụ } (\vec{F}_1, \vec{F}_1'')$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_2' + \text{ngẫu lực phụ } (\vec{F}_2, \vec{F}_2'')$$

.....

$$\vec{F}_n = \vec{F}_n' + \text{ngẫu lực phụ } (\vec{F}_n, \vec{F}_n'')$$

Như vậy, từ một hệ lực phẳng bất kỳ, áp dụng định lý dời lực ta đã đưa về một hệ lực phẳng đồng quy tại O và một hệ ngẫu lực phẳng. Vấn đề bây giờ là thu gọn hệ lực phẳng đồng quy và hệ ngẫu lực phẳng đó lại.

a) Thu hệ lực phẳng đồng quy tại O

Theo lý thuyết về hệ lực phẳng đồng quy, hợp các lực $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n'$ đặt tại O lại ta được một lực cũng đặt tại O có vectơ bằng tổng hình học các vectơ lực thành phần: $\vec{R} = \sum \vec{F}'$, nhưng $\sum \vec{F}' = \sum \vec{F}$ (vì dời lực song song), vậy: $\vec{R} = \sum \vec{F}$.

Vectơ $\vec{R}$ được gọi là *vectơ chính*. Về trị số: $R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}$

Về phương chiều: $\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{\sum X}{R}$; $\sin \alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{\sum Y}{R}$

b) Thu hệ ngẫu lực phụ

Theo định lý dời lực, các ngẫu lực phụ lần lượt có mômen:

$$m_1 = m_o(\vec{F}_1)$$

$$m_2 = m_o(\vec{F}_2)$$

.....

$$m_n = m_o(\vec{F}_n)$$

Hợp các ngẫu lực phụ đó lại, theo lý thuyết hợp ngẫu lực ta được một ngẫu lực có mômen M_o bằng tổng đại số mômen của các ngẫu lực hợp thành: $M_o = m_1 + m_2 + \dots + m_n$

$$\text{Hay: } M_o = m_o (\vec{F}_1) + m_o (\vec{F}_2) + \dots + m_o (\vec{F}_n) = \sum m_o (\vec{F})$$

Tức là, mômen của ngẫu lực thu được bằng tổng đại số mômen của tất cả các lực đã cho đối với tâm thu gọn O. $M_o = \sum m_o (\vec{F})$. M_o được gọi là *mômen chính*.

Tóm lại, thu gọn một hệ lực phẳng bất kỳ về một tâm cho trước ta được một vectơ chính và một mômen chính.

- Vectơ chính bằng tổng hình học các vectơ thành phần:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad (2-19)$$

- Mômen chính bằng tổng đại số mômen của tất cả các lực thành phần đối với tâm thu gọn:

$$M_o = \sum m_o (\vec{F}) \quad (2-20)$$

Vectơ chính luôn luôn không đổi dù có thay đổi tâm thu gọn O đến một vị trí nào trên mặt phẳng của các lực vì ta thực hiện phép dời lực song song nên phương chiều và trị số của các lực thành phần đều không đổi.

Nhưng mômen chính thì thay đổi theo tâm thu gọn vì các cánh tay đòn của các ngẫu lực phụ thay đổi theo tâm thu gọn.

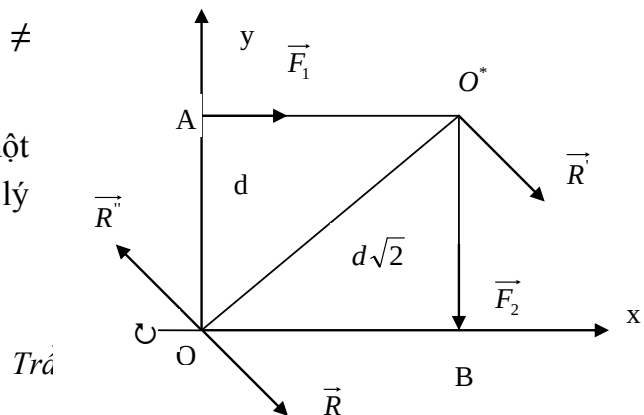
Như vậy, ta đã khảo sát xong vấn đề thu gọn một hệ lực phẳng bất kỳ. Mục đích của việc thu gọn này là đưa hệ về dạng cuối cùng đơn giản nhất, nên cần ta tiếp tục khảo sát để đưa hệ lực phẳng về dạng tối giản đó.

2.1.5.2. Thu gọn hệ lực phẳng bất kỳ về dạng tối giản

Tùy theo kết quả của việc thu gọn ở trên ($\vec{R}$ và M_o khác hay bằng không) hệ lực phẳng bất kỳ có thể thu về các dạng tối giản khác nhau. Các trường hợp có thể xảy ra như sau:

a) Hệ lực có $R \neq 0, M_o \neq 0$

Trong trường hợp này hệ có một hợp lực. Thật vậy, theo định lý



Hình 2.26

đảo về dôi lực ta có thể thu $\vec{R}$ và M_o về một lực duy nhất $\vec{R}'$. $\vec{R}'$ đặt tại O^* (hình 2.26), có phương chiều và trị số tương đương với $\vec{R}$ và đặt cách đường tác dụng của $\vec{R}$ một đoạn $OO^* = \frac{M_o}{R}$, về phía sao cho mômen của $\vec{R}'$ đối với điểm O có cùng dấu với M_o , $\vec{R}'$ chính là hợp lực của hệ.

Ví dụ 2.10

Một bản hình vuông cạnh d, chịu tác dụng bởi hai lực $F_1 = F_2 = 20$ N đặt tại hai đỉnh A và B như hình vẽ 2.26. Hãy thu gọn hệ lực đó.

Bài giải

Thu gọn $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ về tâm O ta được:

*) *Véc tơ chính:*

$$\text{Về trị số: } R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2} = 28,28 \text{ N}$$

$$\text{Về phương chiều: } \cos \alpha = \frac{\sum X}{R} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{\sum Y}{R} = -\frac{20}{20\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Từ đây ta có $\alpha = 315^\circ$

$$\begin{aligned} \text{*) Mômen chính: } M_o &= \sum m_o(\vec{F}) = m_o(\vec{F}_1) + m_o(\vec{F}_2) = -F_1 \cdot d - F_2 \cdot d \\ &= -(F_1 + F_2) \cdot d = -(20 + 20) \cdot d = -40d \end{aligned}$$

Như vậy, hệ thu về hợp lực $\vec{R}'$. Về trị số: $R' = R = 28,28$ N. Về phương chiều: $\vec{R}'$ song song cùng chiều với $\vec{R}$ (lập với trục x một góc 315°) và đặt cách đường tác dụng của $\vec{R}$ một đoạn:

$$OO^* = \frac{M_o}{R'} = \frac{40d}{20\sqrt{2}} = d \cdot \sqrt{2}, \text{ về phía bên phải của } \vec{R} \text{ để cho } m_o(\vec{R}') \text{ là cùng dấu với } M_o \text{ (thuận chiều kim đồng hồ) tức là nằm trên đỉnh } O^* \text{ của bản.}$$

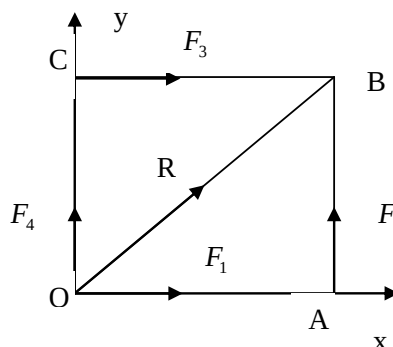
b) Hệ lực có $R \neq 0, M_o = 0$

Trong trường hợp này hệ cũng có một hợp lực.

Thật vậy, khi thu gọn về O ta có $M_o = 0$ nên rõ ràng hệ chỉ tương đương với $\vec{R}$. $\vec{R}$ chính là hợp lực của hệ.

Ví dụ 2.11

Một bản hình vuông OABC chịu tác dụng của các lực $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 10 \text{ N}$ sắp xếp như trên hình vẽ 2.27. Hãy thu gọn hệ lực đó về O. Biết rằng các cạnh của hình vuông là $d = 20 \text{ cm}$.



Hình 2.27

Bài giải

Thu gọn hệ lực phẳng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ tác dụng về tâm O ta được:

- Vectơ chính $\vec{R}$:

- Về trị số:

$$R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \text{ . Trong đó :}$$

$$\sum X = F_1 + F_3 = 10 + 10 = 20 \text{ N}$$

$$\sum Y = F_2 + F_4 = 10 + 10 = 20 \text{ N, nên: } R = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2} = 28,2 \text{ N}$$

- Về phương chiều:

$$\cos \alpha = \frac{\sum X}{R} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ . } \sin \alpha = \frac{\sum Y}{R} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ . Từ đây ta có } \alpha = 45^\circ$$

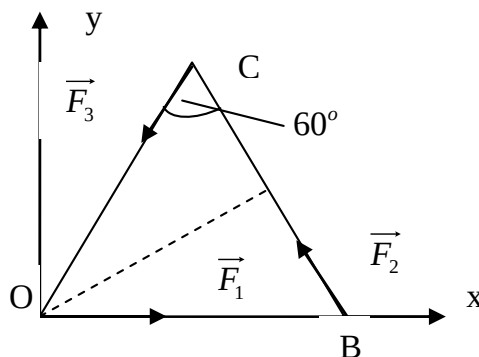
- Mômen chính:

$$M_o = \sum m_o(\vec{F}) = F_2 \cdot d - F_3 \cdot d = (F_2 - F_3) \cdot d = (10 - 10) \cdot 20 = 0$$

Như vậy vectơ chính $\vec{R}$ chính là hợp lực của hệ có trị số bằng 28,2 N đặt tại O và hướng theo đường chéo OB của bản (vì $\alpha = 45^\circ$)

c) Hệ lực có $R = 0, M_o \neq 0$

Trường hợp này hệ lực tương đương với một ngẫu lực, có mômen bằng mômen chính M_o của hệ. Theo lý thuyết về ngẫu lực,



Hình 2.28

mômen chính trong trường hợp này không phụ thuộc vào tâm thu gọn.

Ví dụ 2.12

Một bản hình tam giác đều, cạnh $d = 20$ cm, chịu tác dụng bởi các lực $F_1 = F_2 = F_3 = 10$ N sắp xếp như hình 2.28. Hãy thu gọn hệ lực đó về O.

Bài giải

Thu gọn hệ lực phẳng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ về tâm O của bản, ta được:

- Vectơ chính:

$$R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}, \text{ trong đó:}$$

$$\sum X = F_1 - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 60^\circ = 10 - 10 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\sum Y = F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \text{ nên } R = 0$$

- Mômen chính: $M_o = F_2 \cdot OH = F_2 \frac{d\sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{2} = 173,2$ Nm

Vậy hệ lực phẳng này tương đương với một ngẫu lực có mômen bằng 173,2 Nm. Ngẫu lực này có tác dụng làm cho bản OBC quay.

2.2. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC

2.2.1. Điều kiện cân bằng với hệ lực phẳng bất kỳ

2.2.1.1. Định lý: Điều kiện cân và đủ để một hệ lực phẳng bất kỳ tác dụng lên một vật rắn được cân bằng là vectơ chính và mômen chính của hệ đối với một điểm nào đó đều bằng không.

Chứng minh:

Phần trên ta đã chứng minh điều kiện đủ. Khi thu gọn hệ lực về một tâm cho trước được một lực và một ngẫu lực, nếu $R = 0$ và $M_o = 0$ thì lực và ngẫu lực triệt tiêu và hệ đã cho là một hệ cân bằng.

Bây giờ ta chứng minh điều kiện cần, hệ muốn cân bằng phải có $R = 0$ và $M_o = 0$. Thật vậy, giả sử hệ không thỏa mãn như vậy, chẳng hạn $R \neq 0$, thì hệ có

hợp lực, còn nếu $R = 0$ nhưng $M_o \neq 0$ hệ sẽ tương đương với một ngẫu lực. Vậy rõ ràng hệ muốn cân bằng cần phải thỏa mãn cả hai điều kiện: $R = 0$ và $M_o = 0$.

2.2.1.2. Các dạng phương trình cân bằng

Trên đây chỉ mới phát biểu điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng bất kỳ một cách tổng quát, có tính chất nguyên tắc. Cần thiết phải suy ra từ đó những điều kiện cân bằng cụ thể, trực tiếp mà các lực của hệ phải thỏa mãn.

• Phương trình cân bằng dạng cơ bản

Theo định lý trên, muốn có một hệ lực phẳng bất kỳ cân bằng thì phải có: $R = 0$ và $M_o = 0$. Nhưng $R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}$ và $M_o = \sum m_o(\vec{F})$ nên điều kiện cân bằng của hệ là:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum m_o(\vec{F}) &= 0\end{aligned}\quad (2-21)$$

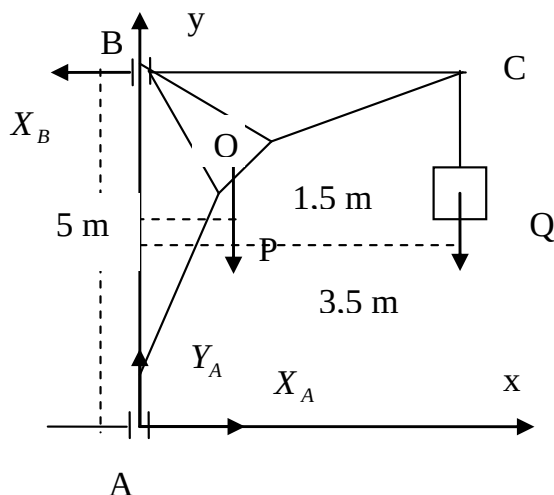
Vậy : “Điều kiện cần và đủ để một hệ lực phẳng bất kỳ tác dụng lên một vật rắn được cân bằng là tổng đại số hình chiếu các lực lên hai trục thẳng góc và tổng đại số mômen của các lực đối với một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tác dụng của các lực đều bằng không” . Ba phương trình (2-21) này được gọi là ba phương trình cân bằng của hệ lực phẳng bất kỳ. Trong đó, hai phương trình đầu diễn tả vật không thể di chuyển theo hai trục tọa độ, còn phương trình thứ ba diễn tả vật không thể quay quanh điểm O (không quay trên mặt phẳng đó) tức là vật sẽ cân bằng.

Ví dụ 2.13

Một cần trục khối lượng 100 kg có thể quay quanh gối trục B và gối đỡ A (hình 2.29). Xác định phản lực của gối A và B. Các kích thước chỉ dẫn trên hình vẽ. Cho biết khối lượng vật nặng $m' = 400$ kg.

Bài giải

Xét sự cân bằng của cần trục. Nó chịu tác dụng của hệ lực phẳng bất kỳ



Hình 2.29

cân bằng $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_B, \vec{X}_A, \vec{Y}_A) \equiv 0$. Trong đó,

$\vec{P}$ - trọng lượng cần trục, về trị số $P = mg = 100 \times 10 = 1000 \text{ N}$.

$\vec{Q}$ - trọng lượng của vật nặng, về trị số $Q = m'g = 400 \times 10 = 4000 \text{ N}$.

$\vec{X}_B$ - phản lực của gối trục B hướng thẳng góc với trục quay của cần trục AB.

$\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ - phản lực của gối A.

Chọn hệ trục xAy như hình vẽ và lập bảng hình chiếu các lực lên hai trục và mômen của các lực đó đối với gối A.

Bảng 2.2

Lực	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{X}_B$	$\vec{P}$	$\vec{Q}$
Hình chiếu và mômen					
X	X_A	0	$-X_B$	0	0
Y	0	Y_A	0	$-P$	$-Q$
m_A	0	0	$5X_B$	$-1,5P$	$-3,5Q$

Viết phương trình cân bằng theo dạng cơ bản cho hệ:

$$\sum X = X_A - X_B = 0$$

$$\sum Y = Y_A - P - Q = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 5X_B - 1,5P - 3,5Q = 0$$

Thay các trị số đã cho và giải ba phương trình này ta được :

$$Y_A = P + Q = 1000 + 4000 = 5000 \text{ N}$$

$$X_A = X_B = \frac{1,5P + 3,5Q}{5} = \frac{1,5.1000 + 3,5.4000}{5} = 3100 \text{ N}$$

Ngoài dạng cơ bản trên, điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng bất kỳ có thể biểu thị dưới dạng phương trình khác.

• **Phương trình cân bằng dạng hai**

« Điều kiện cần và đủ để một hệ lực phẳng bất kỳ tác dụng lên một vật rắn được cân bằng là tổng đại số mômen của các lực đối với hai điểm bất kỳ A, B và tổng đại số hình chiếu các lực đó lên một trục nằm trên mặt phẳng, nhưng không thẳng góc với phương AB đều bằng không », nghĩa là :

$$\sum m_A (\vec{F}) = 0$$

$$\sum m_B (\vec{F}) = 0$$

$$\sum X = 0, \text{ với trục } x \text{ không được thẳng góc với phương AB.} \quad (2-22)$$

Thật vậy, trong trường hợp này hệ không thể thu về một ngẫu lực vì tổng mômen của các lực đối với bất kỳ điểm nào trên vật cũng bằng không ($\sum m_A (\vec{F}) = 0, \sum m_B (\vec{F}) = 0$)

Hệ cũng không thể thu về một hợp lực, vì theo hai phương trình đầu nếu hệ có hợp lực thì hợp lực đó phải nằm trên phương AB. Nhưng mặt khác phương AB không thẳng góc với trục x mà $\sum X = 0$ nên hợp lực đó phải bằng không. Hệ không tương đương với ngẫu lực và cũng không có hợp lực. Vậy đó là hệ lực cân bằng.

Ví dụ 2.14

Áp dụng điều kiện cân bằng để giải lại chính ví dụ 2.13 ở trên.

Bài giải

Lập những phương trình mômen của các lực tác dụng lên cần trục đối với hai điểm A và B và phương trình hình chiếu các lực đó lên trục y không thẳng góc với phương AB.

$$\sum m_A (\vec{F}) = 5X_B - 1,5P - 3,5Q = 0$$

$$\sum m_B (\vec{F}) = 5X_A - 1,5P - 3,5Q = 0$$

$$\sum Y = Y_A - P - Q = 0$$

Giải hệ ba phương trình này ta được : $Y_A = 5\,000\text{ N}$; $X_A = X_B = 3\,100\text{ N}$

Kết quả tìm được hoàn toàn phù hợp với cách giải theo điều kiện cân bằng dạng cơ bản trên.

- **Phương trình cân bằng dạng ba**

« Điều kiện cần và đủ để một hệ lực phẳng bất kỳ tác dụng lên một vật rắn được cân bằng là tổng đại số mômen của tất cả các lực đối với ba điểm bất kỳ không thẳng hàng trên mặt phẳng đó đều bằng không ». Tức là :

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0$$

$$\sum m_B(\vec{F}) = 0$$

$$\sum m_C(\vec{F}) = 0, \text{ với } A, B, C \text{ không thẳng hàng} \quad (2-23)$$

Thật vậy, trong trường hợp này hệ không thể thu gọn về ngẫu lực vì tổng mômen của các lực đối với các điểm trên vật đều bằng không. Hệ cũng không thể thu về một hợp lực, vì theo ba phương trình trên, nếu hệ có hợp lực thì hợp lực đó phải đi qua ba điểm A, B, và C không thẳng hàng. Điều này không thể có được. Hợp lực là bằng không. Vậy hệ lực đã cho phải là hệ lực cân bằng.

Ví dụ 2.15

Một bản tam giác đều ABC có cạnh là d chịu tác dụng của các lực $F_1 = 60 \text{ N}$, $F_2 = 40 \text{ N}$, $F_3 = 20 \text{ N}$ như hình vẽ 2.30.

Tìm các phản lực $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, và $\vec{S}_3$ tác dụng vào các thanh DA, BE và CK của bản.

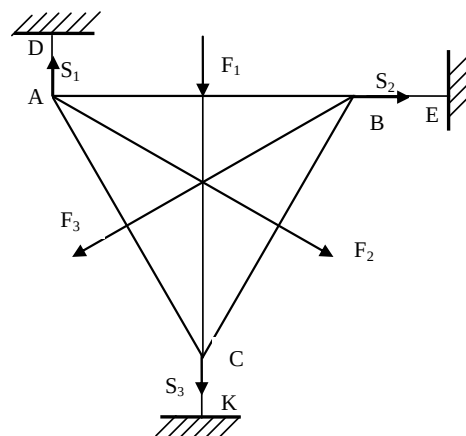
Bài giải

Xét sự cân bằng của bản ABC. Nó chịu tác dụng của hệ lực phẳng bất kỳ cân bằng:

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3) \equiv 0$, trong đó $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ và $\vec{F}_3$ là các lực cho; $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ và $\vec{S}_3$ là các phản lực của các thanh AD, BE và CK, chúng nằm theo trục các thanh đó.

Theo điều kiện cân bằng (2-23) lập ba phương trình mômen của các lực tác dụng lên bản đối với ba điểm A, B và C không thẳng hàng, ta có:

$$\sum m_A(\vec{F}) = -F_1 \cdot \frac{d}{2} - S_3 \cdot \frac{d}{2} - F_3 \cdot \frac{d}{2} = 0$$



Hình 2.30

$$\sum m_B(\vec{F}) = -S_1 \cdot d + F_1 \cdot \frac{d}{2} + S_3 \cdot \frac{d}{2} + F_2 \cdot \frac{d}{2} = 0$$

$$\sum m_C(\vec{F}) = -S_1 \cdot \frac{d}{2} + F_3 \cdot \frac{d}{2} - S_2 \cdot d \cdot \cos 30^\circ - F_2 \cdot \frac{d}{2} = 0$$

Giải ra ta được : $S_3 = -F_1 - F_3 = -60 - 20 = -80$ N. Trị số của S_3 mang dấu âm, ta phải đổi chiều đã chọn trên hình vẽ.

$$S_1 = \frac{F_1}{2} - \frac{S_3}{2} + \frac{F_2}{2} = \frac{60}{2} - \frac{80}{2} + \frac{40}{2} = 10 \text{ N}$$

$$S_2 = \frac{-S_1 + F_3 - F_2}{2 \cos 30^\circ} = \frac{-10 + 20 - 40}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = -10\sqrt{3} \approx -17,32 \text{ N}.$$

Trị số của S_2 cũng mang dấu âm nên chiều của nó ngược với chiều đã chọn.

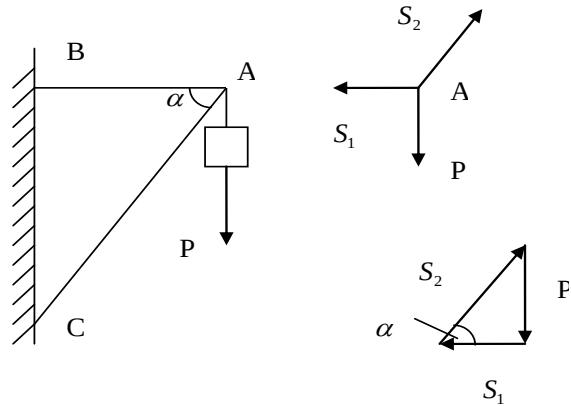
Tóm lại, ta có thể giải một bài toán hệ lực phẳng bất kỳ theo một trong ba dạng cân bằng trên. Thông thường điều kiện cân bằng dạng cơ bản là điều kiện tổng quát và nên dùng nhất.

2.2.2. Điều kiện cân bằng với các hệ lực phẳng đặc biệt

2.2.2.1. Hệ lực phẳng đồng quy

a. Theo hình học :

« Điều kiện cần và đủ để cho một hệ lực phẳng đồng quy tác dụng lên một vật rắn được cân bằng là đa giác lực của hệ phải tự đóng kín »



Hình 2.31

Ví dụ 2.16

Tại nút A của một giá ABC treo một vật khối lượng $m = 10$ kg. Hãy tính phản lực của các thanh AB và BC, cho biết : $AB = 20$ cm, $AC = 40$ cm (hình 2.31)

Bài giải

Xét sự cân bằng của nút A. Nó chịu tác dụng bởi ba lực đồng quy cân bằng: Trọng lực P của vật ($P = m \cdot g = 10 \cdot 10 = 100$ N) và các phản lực S_1 và S_2 của các thanh nằm dọc theo trục, như hình vẽ.

Ba lực này cân bằng nên đa giác lực của chúng tự đóng kín. Ta dựng đa giác lực này bắt đầu bằng lực đã biết $\vec{P}$ biểu diễn bằng vectơ lực đi xuống, lúc đó vectơ nằm ngang xác định lực $\vec{S}_1$ và vectơ xiên chéo lên xác định lực $\vec{S}_2$. Trị số các lực chưa biết $\vec{S}_1$ và $\vec{S}_2$ có thể tìm bằng cách giải tam giác lực nhỏ vừa dựng được này.

$$S_1 = S_2 \cdot \cos \alpha ; S_2 = \frac{P}{\sin \alpha} . \text{ Nhưng } \cos \alpha = \cos \overline{ABC} = \frac{AB}{AC} = \frac{20}{40} = 0,5, \text{ nên } \alpha = 60^\circ$$

và

$$\sin \alpha = \sin 60^\circ \approx 0,866. \text{ Do đó : } S_2 = \frac{P}{\sin \alpha} \approx \frac{100}{0,866} \approx 116 \text{ N}; S_1 = S_2 \cdot \cos \alpha \approx \frac{100}{0,866} \cdot 0,5 \approx 57,8 \text{ N}$$

b. Theo giải tích:

“Điều kiện cần và đủ để một hệ lực phẳng đồng quy cân bằng là tổng đại số hình chiếu các lực của hệ lực đó lên hai trục tọa độ đều bằng không”. Như vậy, đây chỉ là một trường hợp đặc biệt của phương trình cân bằng dạng cơ bản đã nêu chi tiết ở trên.

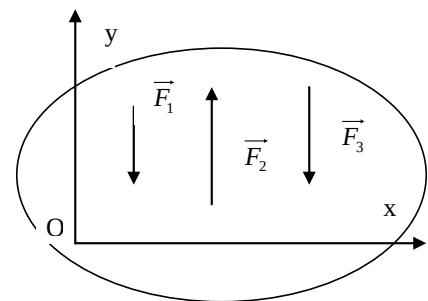
2.2.2.2. Hệ lực phẳng song song

Giả sử có hệ lực phẳng song song ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$) tác dụng lên một vật rắn (hình 2.32). Chọn trục Oy song song với phương các lực. Vì hệ lực phẳng song song chỉ là một trường hợp đặc biệt của hệ lực phẳng bất kỳ nên khi vật cân bằng có thể áp dụng điều kiện cân bằng dạng cơ bản (2-21). Nhưng trong đó, $\sum X = 0$ là một điều hiển nhiên vì theo giả thiết các lực $\vec{F}$ đều thẳng góc với trục x (song song với trục y). Như thế, chỉ cần phải thỏa mãn 2 điều kiện:

$$\sum Y = 0$$

$$\sum m_o(\vec{F}) = 0 \quad (2-24)$$

Vậy: “Điều kiện cần và đủ để một hệ lực phẳng song song tác dụng lên một vật rắn được cân bằng là hình chiếu của các lực lên trục y song song với phương các lực và tổng đại số mômen của các lực đối với một điểm bất kỳ trên mặt phẳng các lực đều phải bằng không”



Hình 2.32

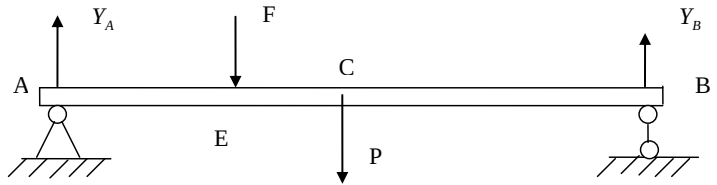
Ta cũng có thể áp dụng phương trình cân bằng dạng hai (2-22) cho hệ lực phẳng song song. Vì $\sum X = 0$ nên phương trình (2-22) chỉ còn:

$$\begin{aligned}\sum m_A(\vec{F}) &= 0 \\ \sum m_B(\vec{F}) &= 0\end{aligned}\quad (2-25)$$

Trong đó, đoạn AB phải không được thẳng góc với trục x, hay song song với phương các lực. Vậy: “Điều kiện cần và đủ để một hệ lực phẳng song song tác dụng lên một vật rắn được cân bằng là tổng đại số mômen của tất cả các lực đối với hai điểm A và B có phương AB không song song với phương các lực phải bằng không”.

Ví dụ 2.17

Một dầm AB đồng chất khối lượng $m = 40 \text{ kg}$, dài 2 m đặt trên hai gối đỡ A và B (hình 2.33). Hỏi phải đặt lực $F = 500 \text{ N}$ thẳng góc với trục dầm cách gối A một đoạn bao nhiêu để phản lực $Y_A = 2 Y_B$.



Hình 2.33

Bài giải

Vì các lực đặt vào $\vec{P}$ và $\vec{F}$ đều thẳng góc với trục dầm nên đặt tại các gối đỡ A và B chỉ có thành phần thẳng đứng $\vec{Y}_A$ và $\vec{Y}_B$

(còn $\vec{X}_A = 0$)

Giả sử dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ đặt tại E cách gối A một đoạn là x sao cho $Y_A = 2 Y_B$. Ta tìm đoạn x đó. Xét sự cân bằng của dầm AB dưới tác dụng của hệ lực song song: $(\vec{F}, \vec{P}, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B) \equiv 0$. Theo điều kiện cân bằng 2-24 ta có:

$$\sum Y = Y_A + Y_B - F - P = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = -F \cdot x - P \cdot AC + Y_B \cdot 2 = 0$$

Thay $Y_A = 2 Y_B$ vào phương trình đầu ta được:

$$3Y_B = P + F$$

$$Y_B = \frac{P + F}{3}, \text{ mà } P = mg = 40 \cdot 10 = 400 \text{ N,}$$

$$\text{do đó, } Y_B = \frac{400 + 500}{3} = 300 \text{ N}$$

Thay trị số của P, F và Y_B vào phương trình thứ hai và giải ra được:

$$x = \frac{2Y_B - P.AC}{F} = \frac{2.300 - 40.1}{500} = 0,4 \text{ m}$$

2.3. XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC TRONG CÁC CẤU KIỆN CHỊU LỰC THƯỜNG GẶP

2.3.1. Mục đích, ý nghĩa

Bài toán tĩnh học là bài toán trong đó có một hay nhiều vật dạng cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực cân bằng. Trong các lực tác dụng đó có một số lực chưa biết – thường là các phản lực. Vấn đề chủ yếu là tìm các lực đó (cũng có khi gặp những câu hỏi như tìm điều kiện cân bằng, vị trí cân bằng; nhưng nói chung rất ít). Mặt khác cũng cần nhận rõ là bài toán tĩnh học rất gần gũi với thực tế, kỹ thuật và nó đề cập đến nhiều đối tượng khác nhau, trong khi đó phần lý thuyết chỉ giải quyết trên đường lối tổng quát và cơ bản.

Do đó việc giải bài toán tĩnh học không phải chỉ là áp dụng công thức một cách đơn thuần mà đòi hỏi phải biết nhìn nhận phân tích và giải quyết vấn đề một cách sâu sắc, chặt chẽ và chính xác. Chúng ta chỉ giới hạn giải các bài toán hệ lực phẳng.

2.3.2. Nguyên tắc

Một vật rắn không tự do (chịu liên kết), chịu tác dụng của hệ lực, đang cân bằng. Khi xác định phản lực liên kết phải chọn được vật cân bằng, tìm đủ hệ lực tác dụng lên vật, lập các phương trình cân bằng, giải tìm ra và nhận định được các phản lực liên kết. Khi giải tuân thủ nguyên tắc:

- Phản lực tựa một chiều và sức căng dây luôn luôn dương.
- Các phản lực khác có chiều đúng như đã chọn nếu kết quả giải ra là dương. Ngược chiều đã chọn nếu kết quả âm.

Nếu bài toán hệ lực phẳng có ngẫu lực thì trong các phương trình hình chiếu không cần để ý đến ngẫu lực, còn trong phương trình mômen thì phải cộng thêm vào mômen của ngẫu lực với chú ý dấu của mômen.

2.3.3. Trình tự và cách xác định

Trình tự và cách xác định các phản lực trong cấu kiện thường gặp có thể tiến hành theo các bước sau:

2.3.3.1. Phân tích bài toán

a) *Chọn vật cân bằng*: Tùy từng bài toán cụ thể ta cần xét xem nên khảo sát sự cân bằng của vật nào. Thường nên chọn vật có lực cần phải tìm.

b) *Đặt lực*: Sau khi chọn vật cân bằng, cần cô lập nó khỏi liên kết với các vật xung quanh và đặt đầy đủ các lực mà nó chịu tác dụng. Thường ta chia lực tác dụng ra làm hai loại

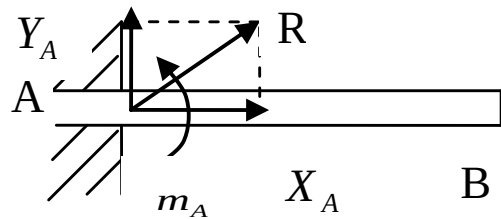
- Lực cho: Là lực bài toán ra cho biết trước.
- Lực liên kết: Là các phản lực ở những mối liên kết của vật cân bằng với các vật xung quanh.

Cần phải đặc biệt chú ý lực liên kết, xem vật cân bằng liên kết với các vật xung quanh ở bao nhiêu vị trí, mỗi vị trí chịu một phản lực liên kết. Không để sót và không đặt sai, nhất là phương của lực.

Khi đã xét đầy đủ lực đặt lên vật cân bằng, ta đã rút ra được một hệ lực cân bằng.

Ghi chú: Trong bài toán hệ lực phẳng bất kỳ, ngoài việc xác định phản lực của các liên kết thường gặp, như liên kết dây, liên kết tựa, liên kết thanh hoặc liên kết bản lề, ta còn gặp các phản lực của loại liên kết ngàm.

Hình 2.34 là sơ đồ của loại liên kết ngàm. Thanh bị ngàm không thể tịnh tiến theo bất kỳ phương nào cũng như không thể quay được, tức là nó bị bắt chặt cứng vào chỗ ngàm



Hình 2.34

Nếu thu gọn các lực đặt vào trên thanh về tâm A của tiết diện thanh ở phía ngàm như đã giới thiệu, ta được một vectơ chính và một mômen chính. Vì thế phản lực của ngàm tại A cũng có một lực và một mômen bằng nhau và ngược chiều với vectơ chính và mômen chính đó. Ta ký hiệu các thành phần phản lực đó là $\vec{R}$ và m_A . Vì $\vec{R}$ chưa biết phương chiều nên thường phân tích thành hai thành phần thẳng góc với nhau $\vec{X}_A$ và $\vec{Y}_A$. Như thế liên kết ngàm có thành phần phản lực: m_A , $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ đều có trị số chưa biết.

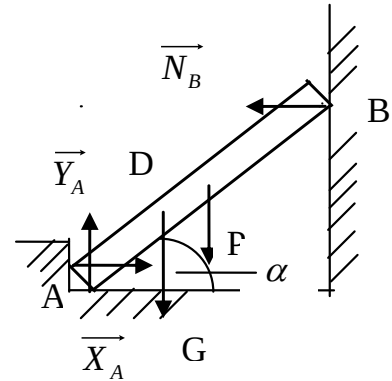
2.3.3.2. Giải bài toán

a) *Thành lập các phương trình cân bằng:* Vì vật đang xét là vật cân bằng nên hệ lực đặt lên nó là một hệ lực cân bằng. Do đó tùy theo hệ lực ta có thể lập các phương trình cân bằng mà hệ lực đó phải thỏa mãn.

Chú ý là chúng ta chỉ nghiên cứu các bài toán tĩnh định trong hệ lực phẳng. Bài toán được coi là tĩnh định nếu số ẩn số bằng số phương trình cân bằng độc lập. Sau khi lập các phương trình chúng ta có thể xác định được bài toán là tĩnh định hay không, nghĩa là có thể so sánh số phương trình cân bằng độc lập của hệ lực với số phản lực hoặc lực chưa biết cần phải tìm.

b) *Giải các phương trình cân bằng:* Từ phương trình cân bằng ta tìm ra lời giải. Khi giải xong phải nhận định các kết quả và liên hệ xem có phù hợp với thực tế không để trả lời đúng đắn các câu hỏi theo yêu cầu của bài toán.

Kết quả giải đúng hay sai phụ thuộc nhiều ở bước phân tích, vì thế cần quan niệm bài toán và từng việc làm một cách thật rõ ràng, chính xác. Mỗi công thức, mỗi lý do dẫn ra đều phải có căn cứ.



Hình 2.35

2.3.4. Ví dụ minh họa

Ví dụ 2.18

Người ta đặt một cái thang AB nặng 20 kg lên tường nhẵn lập với phương ngang một góc $\alpha = 45^\circ$. Tại điểm D với $AD = \frac{1}{3}AB$, một người nặng $G = 60 \text{ kg}$ (600 N) đứng. Tìm phản lực tại A và B.

Bài giải

Xét cân bằng của vật khảo sát là thang AB với liên kết tựa tại A là $\vec{X}_A$ và $\vec{Y}_A$, tại B là $\vec{N}_B$ có phương, chiều, điểm đặt như hình vẽ. $P = 20 \cdot 10 = 200 \text{ N}$.

Giải phóng liên kết tựa, thang AB cân bằng bởi hệ lực tác dụng như sau:

$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{P}, \vec{G}) \equiv 0$. Ta lập hệ phương trình cân bằng bởi phương pháp giải tích, với hệ phương trình dạng cơ bản. Chọn hệ trục tọa độ chiều là X A Y, chiều lên X và Y ta có:

$$\sum X = X_A - N_B = 0$$

$$\sum Y = Y_A - G - P = 0$$

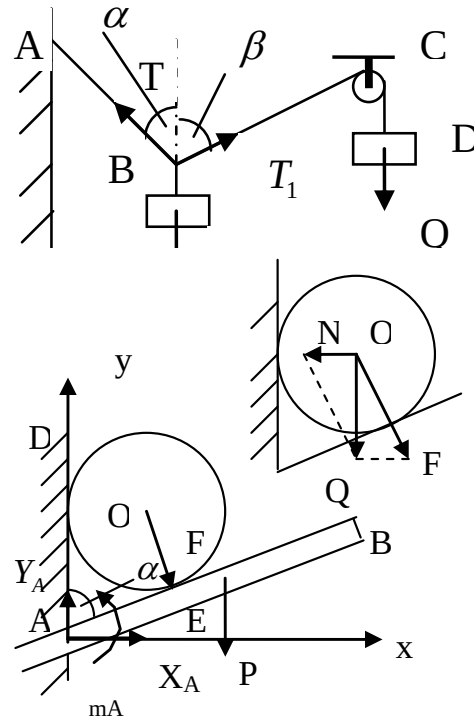
$$\sum m_A(\vec{F}) = -G \cdot \frac{1}{3}AB \cos \alpha - P \cdot \frac{1}{2}AB \cos \alpha + N_B \cdot AB \sin \alpha = 0$$

Thay số, với $G = 600 \text{ N}$, $P = 200 \text{ N}$, $\alpha = 45^\circ$, giải hệ 3 phương trình với 3 ẩn số ta được: $X_A = N_B = 300 \text{ N}$; $Y_A = 800 \text{ N}$

Nhận xét: Đối với liên kết tựa (hoặc gối tựa con lăn, liên kết dây mềm không dẫn), không những biết trước giá của phản lực mà còn biết trước chiều của chúng nữa nên trị số ta tìm được luôn luôn dương.

Ví dụ 2.19

Dây AB được cột chặt tại A, đầu B treo vật nặng P. Dây BCD luôn qua ròng rọc và đầu D treo vật nặng $Q = 10 \text{ N}$. Xác định sức căng T của dây AB và trọng lượng P. Bỏ qua ma sát trên ròng rọc. Biết ở vị trí cân bằng dây AB và BC lập với phương thẳng đứng các góc $\alpha = 45^\circ$, và $\beta = 60^\circ$ (hình 2.36).



Trần Chí Thu

Hình 2.37

Bài giải

a) Vật khảo sát: Nút B

b) Liên kết: dây AB, BC. Hệ lực đặt tại nút B cân bằng gồm: $(\vec{T}, \vec{T}_1, \vec{P}) \equiv 0$

c) Lập điều kiện cân bằng: Vì ròng rọc không có ma sát, nên $T_1 = Q = 10 \text{ N}$. Chiều của cả 3 lực đều đã biết. Chọn lên hệ trục XBY, ta có:

$$\sum X = -T \cos 45^\circ + T_1 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y = T \cos 45^\circ + T_1 \cos 60^\circ - P = 0$$

Thay số và giải ra ta có: $T = 12,25 \text{ N}$, $P = 13,66 \text{ N}$

Ví dụ 2.20

Thanh AB dài $l = 0,8 \text{ m}$ khối lượng $m = 10 \text{ kg}$ ngàm chặt vào tường tại đầu A và làm với tường góc $\alpha = 60^\circ$ (hình 2.37). Trong góc DAB đặt một ống tròn khối lượng $m' = 18 \text{ kg}$ tiếp xúc với thanh tại E, khoảng cách $AE = d = 0,3 \text{ m}$. Xác định các phản lực tại ngàm.

Bài giải

Xét sự cân bằng của thanh AB. Nó chịu tác dụng của hệ lực phẳng cân bằng bất kỳ:

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{P}, \vec{F}, m_A) \equiv 0$$

Trong đó, $\vec{P}$ là trọng lượng của thanh AB đặt tại chính giữa thanh, về trị số

$$P = mg = 10 \cdot 10 = 100 \text{ N};$$

$\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ các phản lực tại ngàm A;

$\vec{F}$ là phản lực của ống tròn đặt vào thanh tại E và thẳng góc với thanh đó, có trị số:

$$F = \frac{Q}{\sin \alpha} \text{ (hình vẽ 2.37). } Q = m' \cdot g = 18 \cdot 10 = 180 \text{ N. Chọn hệ trục xAy như hình}$$

vẽ và lập bảng tính toán hình chiếu các lực lên hai trục và lấy mômen của các lực đó đối với điểm A. Ta có kết quả trong bảng sau:

Bảng 2.3

Lực và mômen	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{F}$	$\vec{P}$	m_A
Hình chiếu và mômen					

X	X_A	0	$F \cos \alpha$	0	0
Y	0	Y_A	$- F \sin \alpha$	- P	0
m_A	0	0	$- F \cdot d$	$- P \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha$	m_A

Viết phương trình cân bằng theo dạng cơ bản cho hệ:

$$\sum X = X_A + F \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y = Y_A - F \sin \alpha - P = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = - F \cdot d - P \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha + m_A = 0$$

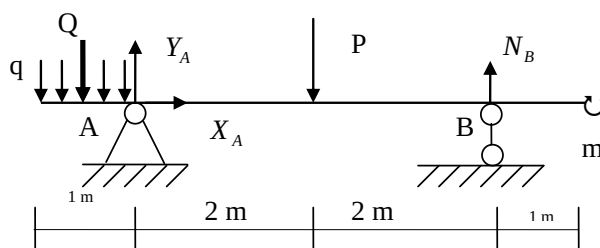
Thay số $F = \frac{Q}{\sin \alpha}$ và giải hệ phương trình này ta được:

$$X_A = - Q \cotg \alpha = - 103,8 \text{ N}$$

$$Y_A = P + Q = 280 \text{ N}$$

$$m_A = Q \frac{d}{\sin \alpha} + P \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha = 96,9 \text{ Nm}$$

Nhận xét: Trị số của X_A mang dấu âm nên ta phải đổi chiều đã chọn của nó trên hình vẽ. Chú ý nguyên tắc, nếu bài toán hệ lực có ngẫu lực thì trong các phương trình hình chiếu không cần để ý tới ngẫu lực, còn trong phương trình mômen thì phải cộng thêm vào mômen của ngẫu lực và chú ý đến dấu của mômen.



Hình 2.38

Ví dụ 2.21

Cho một dầm AB chịu lực như hình vẽ 2.38. Trên đoạn trái điểm A dầm chịu lực phân bố $q = 10 \text{ kN/m}$. Giữa dầm chịu lực $P = 20 \text{ kN}$. Phía cuối dầm bên phải, chịu mômen $m = 10 \text{ kNm}$. Các khoảng cách cho trên hình vẽ. Hãy xác định các phản lực tại gối A và B.

Bài giải

Vật khảo sát cân bằng là dầm AB. Đưa lực phân bố q về một lực tập trung $Q = q \cdot l$
 $m = 10 \text{ kN}$, đặt tại trung tâm đoạn phân bố bên trái điểm A. Đặt các phản lực $\vec{X}_A$,
 $\vec{Y}_A$, $\vec{N}_B$ như hình vẽ. Dầm được cân bằng bởi hệ lực tác dụng sau: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{P},$
 $\vec{Q}, m) \equiv 0$. Lập hệ phương trình dạng cơ bản ta có:

$$\sum X = X_A = 0$$

$$\sum Y = -Q + Y_A - P + N_B = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 10 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 2 + N_B \cdot 4 - 10 = 0$$

Giải ra ta được: $X_A = 0$, $Y_A = 18,75 \text{ kN}$, $N_B = 11,25 \text{ kN}$

CÂU HỎI ÔN TẬP

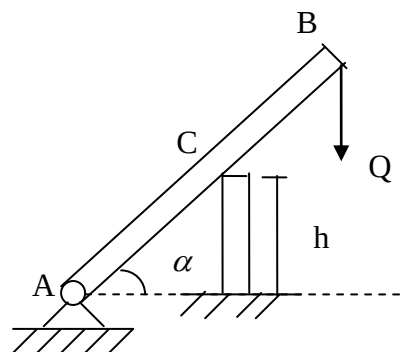
1. Trình bày quy tắc hình bình hành lực, quy tắc đa giác lực. Cách cộng các lực trong trường hợp đặc biệt.
2. Cách hợp hai lực song song.
3. Cách phân tích một lực thành hai thành phần. Cách chiếu một lực lên hai trục tọa độ vuông góc.
4. Cách xác định hợp lực của một hệ lực phẳng đồng quy.
5. Cách xác định mômen của một lực đối với một điểm, và mômen của một hợp lực đối với một điểm. Cách hợp hệ ngẫu lực phẳng.
6. Trình bày phép dời lực.
7. Cách thu gọn hệ lực phẳng bất kỳ về dạng tối giản.
8. Trình bày các điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng bất kỳ.
9. Trình bày các điều kiện cân bằng với các hệ lực phẳng đặc biệt.
10. Trình bày mục đích, ý nghĩa, nguyên tắc và trình tự cách xác định các phản lực trong cấu kiện thường gặp.

BÀI TẬP

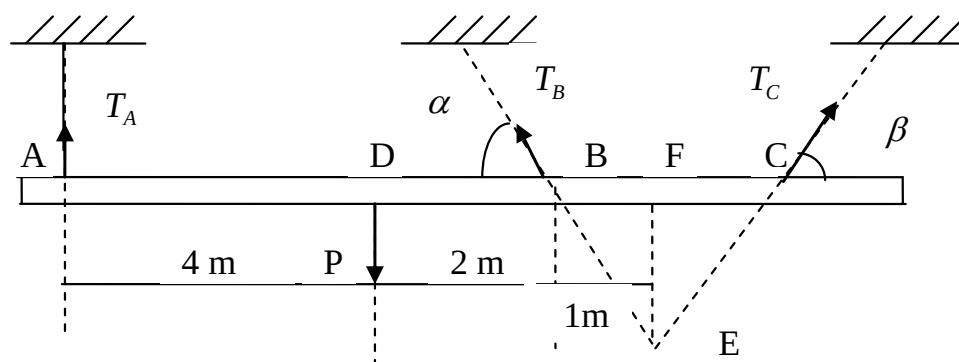
1. Thanh AB dài $l = 8 \text{ m}$, khối lượng 12 kg bắt bản lề cố định tại A và tỳ lên tường C cao $h = 3 \text{ m}$ (hình 2.39). Đầu B treo một trọng vật có khối lượng 20 kg

Xác định phản lực tại các gối đỡ A và chỗ tỳ C. Biết $\alpha = 60^\circ$.

Đáp số: $X_A = 260 \text{ N}$, $Y_A = 170 \text{ N}$, $N_C = 300 \text{ N}$



Hình 2.39



Hình 2.40

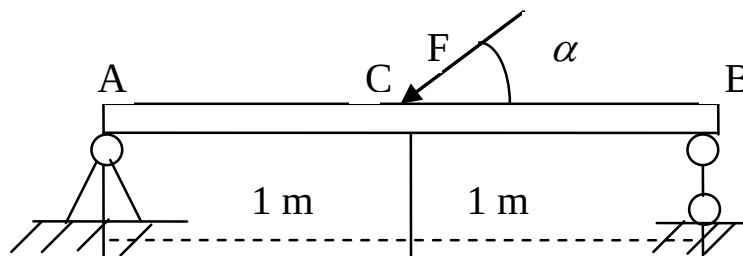
2. Một phần của dàn cầu treo bằng ba sợi dây phân bố như hình 2.40. Khối lượng của phần dàn này $m = 420 \text{ kg}$ và đặt ở điểm D. Các kích thước cho trên hình vẽ. Biết $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, Tìm phản lực các dây, nếu dàn AC nằm ngang.

Đáp số: $T_A = 1800 \text{ N}$, $T_B = 1757 \text{ N}$, $T_C = 1243 \text{ N}$.

3. Một dầm AB đặt trên hai gối đỡ A và B chịu tác dụng của lực $F = 100000 \text{ N}$ đặt xiên với trục dầm một góc $\alpha = 30^\circ$ như hình vẽ 2.41.

Hãy xác định các phản lực tại hai gối đỡ đó.

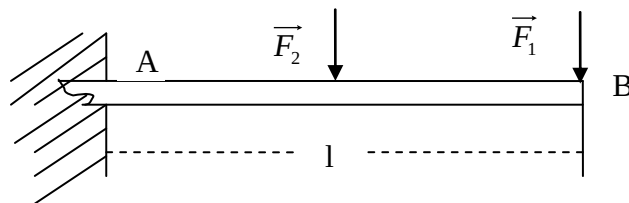
Đáp số: $X_A = 86602,5 \text{ N}$,



Hình 2.41

$$Y_A = Y_B = 25000 \text{ N}$$

4. Thanh AB ngàm chặt tại đầu A, đầu B chịu tác dụng lực $F_1 = 2000 \text{ N}$, chính giữa thanh chịu tác dụng một lực $F_2 = 3000 \text{ N}$.

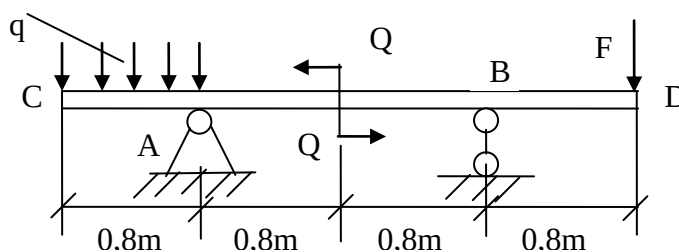


Hình 2.42

Chiều dài $AB = l = 1,5 \text{ m}$ (hình 2.42).

Hãy xác định phản lực tại ngàm. *Đáp số:* $Y_A = 5000 \text{ N}$, $m_A = 5250 \text{ Nm}$.

5. Dầm CD đặt trên hai gối đỡ A và B chịu tác dụng các lực $F = 20000 \text{ N}$, ngẫu lực $(\vec{Q}, \vec{Q})$ có mômen $m = 8000 \text{ Nm}$, lực phân bố đều $q = 20000 \text{ N/m}$ được sắp xếp như trên hình vẽ 2.43.

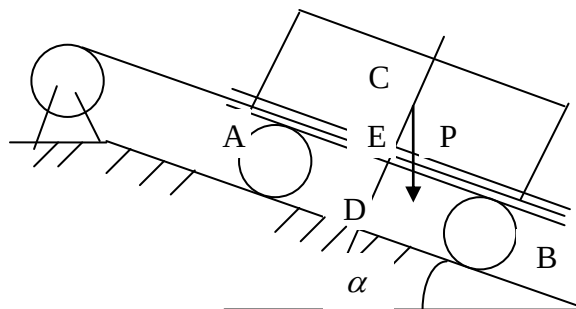


Hình 2.43

Hãy xác định phản lực tại các gối đỡ A và B của dầm.

Đáp số: $Y_A = 15000 \text{ N}$, $Y_B = 21000 \text{ N}$

6. Một toa xe khối lượng 1000 kg được giữ lại trên một mặt phẳng nghiêng $\alpha = 30^\circ$ nhờ một dây cáp luôn qua ròng rọc đặt song song với mặt phẳng nghiêng đó.



Hình 2.44

Xác định sức ép của bánh xe lên mặt phẳng ở các điểm A và B và phản lực của dây cáp nếu $AD = BD = d = 0,75 \text{ m}$ và $CE = b = 0,3 \text{ m}$ (hình 2.44). C là trọng tâm của toa xe.

Đáp số: $N_A = 3.330 \text{ N}$, $N_B = 5.330 \text{ N}$, $T = 5.000 \text{ N}$

HẾT CHƯƠNG 2

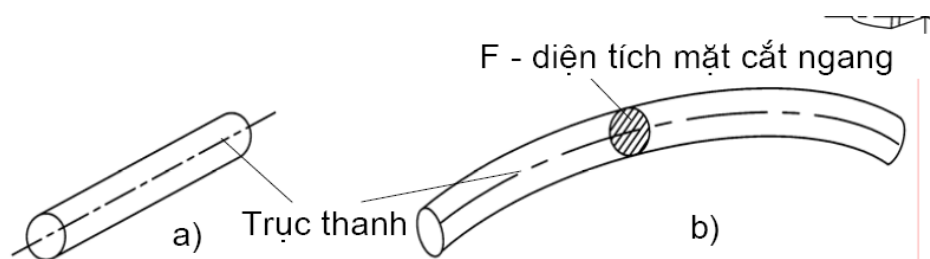
Phần 2. SỨC BỀN VẬT LIỆU

Chương 3. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

3.1. NHIỆM VỤ, ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU

Khi thiết kế một công trình hay máy móc, người cán bộ kỹ thuật phải tính toán các bộ phận của công trình hay máy móc đó (gọi tắt là *cấu kiện*) sao cho *an toàn* và *rẻ tiền*, tức là sao cho khi chịu lực từ bên ngoài tác dụng vào, các cấu kiện đó có *đủ cường độ*, *đủ độ cứng* và *được ổn định*; mặt khác hao phí vật liệu phải ít nhất và sử dụng được tương đối lâu dài. *Sức bền vật liệu* chính là môn khoa học có cơ sở lý luận để giải quyết những vấn đề trên. Khi chịu lực bên ngoài tác dụng, nếu cấu kiện có đủ sức chịu đựng, không bị phá hỏng, ta nói rằng nó có đủ cường độ. Cũng dưới tác dụng của lực bên ngoài, nếu cấu kiện đó tuy có sự thay đổi về hình dạng và kích thước (gọi là biến dạng) nhưng không đáng kể và không ảnh hưởng tới sự làm việc bình thường của nó, thì ta nói nó có độ cứng tốt. Đảm bảo một cấu kiện ổn định, nghĩa là đảm bảo sao cho dưới tác dụng của một lực nhất định cấu kiện vẫn giữ được hình thức biến dạng ban đầu của nó mà không chuyển sang một hình thức biến dạng khác.



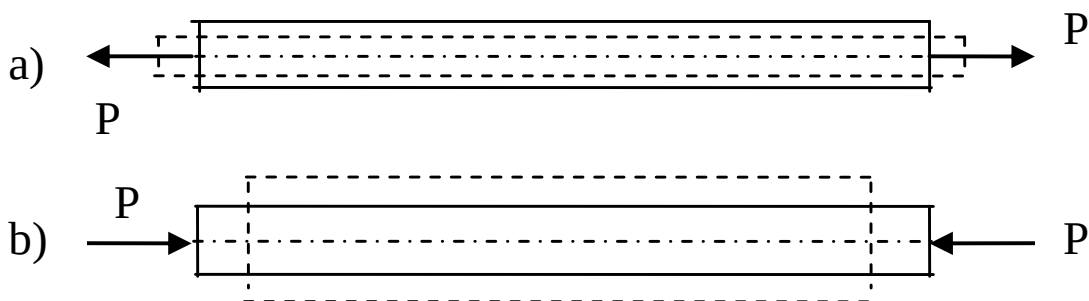
Hình 3.1. Thanh, với: a) Thanh thẳng; b) Thanh cong

Ở đây ta thấy yêu cầu an toàn và rẻ tiền có mâu thuẫn với nhau. Vì muốn an toàn thì thường phải dùng nhiều vật liệu nhưng muốn rẻ tiền phải dùng ít vật liệu. Song chính việc giải quyết mâu thuẫn đó là một yếu tố rất quan trọng có ảnh hưởng lớn đến sự phát triển của môn sức bền vật liệu.

Hình dạng của vật thể được nghiên cứu chủ yếu trong môn sức bền vật liệu là các thanh, tức là các vật thể có chiều dài lớn hơn nhiều so với các kích thước khác của nó.

Hình dạng hình học của thanh được biểu thị bằng trục của thanh và mặt cắt thẳng góc với trục của thanh (từ này gọi tắt là mặt cắt). Trục của thanh là đường nối trọng tâm của các mặt cắt. Trục của thanh có thể thẳng hoặc cong, nên có thanh thẳng hoặc thanh cong. Mặt cắt của thanh có thể không đổi hoặc thay đổi theo chiều dài của thanh. Giáo trình này chỉ nghiên cứu các thanh thẳng. Sau này trong sơ đồ tính toán ta chỉ cần biểu diễn thanh bằng đường trục của nó.

Ở đây cần chỉ rõ: vì môn sức bền vật liệu nghiên cứu các tính chất chịu lực và biến dạng của vật thể dưới tác dụng của lực bên ngoài nên đối tượng của môn học này là vật thể rắn thực. Đó là điểm khác nhau quan trọng giữa sức bền vật liệu và cơ lý thuyết (Chương 1, trong cơ lý thuyết, vật thể được xem là rắn tuyệt đối) mặc dù hai môn học này liên hệ với nhau rất khăng khít. Có nắm được sự khác nhau đó thì sau này mới nhận rõ được với điều kiện nào thì ta vẫn có thể áp dụng được những quy tắc của cơ lý thuyết như vấn đề dôi lực, hợp lực ... vào môn sức bền vật liệu. Để làm ví dụ, ta hãy xét hình 3.2.



Hình 3.2

Theo quan điểm của cơ học lý thuyết thì hai trường hợp a) và b) trên hình 3.2 là tương đương nhau. Thực vậy, trường hợp b) được suy ra từ trường hợp a) bằng cách di chuyển các lực P theo đường tác dụng của chúng và ngược lại. Nhưng theo

quan điểm của sức bền vật liệu thì hai trường hợp a) và b) rất khác nhau. Trong trường hợp a) thanh bị kéo, còn trường hợp b) thanh bị nén. Hình dạng của thanh sau khi biến dạng trong hai trường hợp đó được vẽ bằng nét đứt. Vì vậy khi xét biến dạng của thanh ta không được phép di chuyển các lực P trên đường tác dụng của chúng.

Cuối cùng cần hiểu rằng, sức bền vật liệu là một môn khoa học kết hợp chặt chẽ giữa lý thuyết và thực nghiệm. Phương pháp nghiên cứu của nó là: trên cơ sở quan sát các hiện tượng trong thực nghiệm nêu thành những giả thuyết để xác lập các công thức rồi đem áp dụng các công thức đó vào tính toán trong thực tế sản xuất. Qua đó các giả thuyết và công thức sẽ được kiểm nghiệm và hoàn thiện hơn.

3.2. CÁC GIẢ THUYẾT CƠ BẢN VỀ VẬT LIỆU

Một vật thể hay một hiện tượng thực tế thường có những tính chất hay quy luật biến hóa rất phức tạp làm trở ngại cho việc nghiên cứu nó. Vì thế để nghiên cứu được dễ dàng người ta thường bỏ qua những tính chất thứ yếu, không có ảnh hưởng lớn đến kết quả nghiên cứu, mà chỉ xét đến những tính chất chủ yếu của vật thể hay hiện tượng đó. Muốn vậy, mỗi môn khoa học thường phải đề ra các giả thuyết để làm đơn giản đối tượng nghiên cứu. Môn sức bền vật liệu cũng vậy, nó cần có những giả thuyết cơ bản, song cũng cần chỉ rõ: mặc dù dựa vào những giả thuyết đó, ta vẫn rút ra được những công thức tính toán đủ chính xác để thỏa mãn yêu cầu của thực tế.

3.2.1. Khái niệm về tính đàn hồi của vật liệu

Một vật thể sẽ có sự thay đổi hình dạng dưới tác dụng của ngoại lực. Khi chịu lực bên ngoài tác dụng vật thể bị biến dạng, nhưng khi bỏ lực đi vật thể trở lại kích thước và hình dáng ban đầu của nó, người ta nói nó có tính chất *đàn hồi hoàn toàn*. Nếu khi bỏ lực đi vật thể không thể hoàn toàn trở về kích thước và hình dạng ban đầu, thì ta nói là vật thể có tính chất đàn hồi không hoàn toàn. Lúc này, biến dạng còn lại được gọi là *biến dạng còn dư*. Nếu quan hệ giữa ngoại lực và biến dạng là bậc nhất, thì vật liệu được gọi *đàn hồi tuyến tính*. Đối với các vật liệu, quan hệ ứng suất – biến dạng cho đến khi bị phá hoại nói chung là những đường cong.

Trong thiên nhiên không có vật thể đàn hồi hoàn toàn trong mọi trường hợp, nhưng thực nghiệm cho biết là thép, gỗ có thể coi như có tính chất đàn hồi hoàn toàn

nếu lực bên ngoài không vượt quá một trị số giới hạn nhất định. Phạm vi nghiên cứu môn sức bền vật liệu trình bày ở đây là hạn chế trong giới hạn đó.

3.2.2. Các giả thuyết cơ bản về vật liệu

3.2.2.1. Vật liệu được coi là liên tục, đồng nhất, đẳng hướng

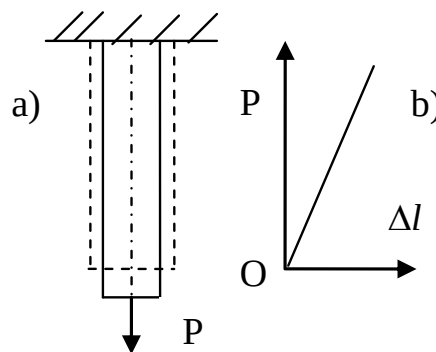
Một vật thể là liên tục và đồng nhất nếu trong cả thể tích của vật thể đều có vật liệu (không hề có khe hở) và tính chất cơ học của vật liệu ở mọi nơi trong vật thể đều giống nhau. Vật liệu đẳng hướng nghĩa là tính chất cơ học tại một điểm theo các phương đều giống nhau. Trong thực tế, ngay cả những vật liệu được coi là hoàn hảo như kim loại, thì cũng có cấu trúc vi mô không liên tục, hoặc không đồng nhất, đẳng hướng. Giả thuyết này cho phép tránh khảo sát cấu trúc vi mô của vật liệu thật, là việc rất phức tạp, thậm chí không làm được. Giả thuyết này thích hợp với các vật liệu thép, sắt, đồng... còn với gạch, gỗ thì không hoàn toàn thích hợp.

3.2.2.2. Vật liệu được coi là đàn hồi

Môn sức bền vật liệu giả thuyết vật liệu của các vật thể có tính chất đàn hồi hoàn toàn.

3.2.2.3. Giả thuyết về quan hệ tỷ lệ bậc nhất giữa biến dạng và lực tác dụng (Định luật Húc)

Thực nghiệm cho thấy trong phạm vi biến dạng đàn hồi của vật liệu, nếu lực tác dụng lên vật thể không vượt quá một trị số giới hạn thì biến dạng của vật thể được xem là tỷ lệ thuận với lực gây ra biến dạng đó. Giả thuyết này còn được gọi là định luật Húc và trong giáo trình này ta cũng chỉ nghiên cứu những loại vật liệu tuân theo định luật Húc. Ví dụ có một thanh chiều dài l chịu tác dụng của một lực P như trên hình 3.3a, theo định luật Húc đồ thị biểu diễn quan hệ giữa biến dạng Δl và lực P là một đường thẳng (hình 3.3b)



Hình 3.3

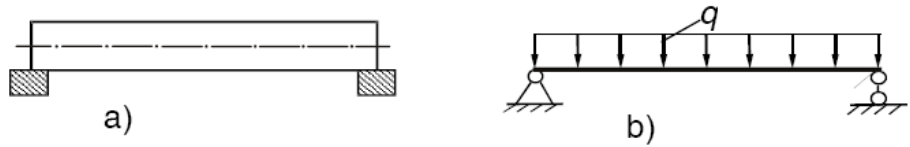
Ngoài các giả thuyết trên, để trong tính toán được đơn giản môn sức bền vật liệu còn dựa vào một nguyên lý rất quan trọng gọi là *nguyên lý độc lập tác dụng* của các lực. Nguyên lý này đã được trình bày trong Chương 1, giáo trình này.

Nguyên lý này phát biểu như sau: *Kết quả tác dụng gây ra do một hệ lực thì bằng tổng những kết quả gây ra do từng lực trong hệ đó, tác động một cách riêng biệt.*

Chú ý rằng *nguyên lý độc lập tác dụng* của các lực chỉ sử dụng được trong điều kiện vật liệu tuân theo định luật Húc và biến dạng của vật thể là rất nhỏ.

3.2.2.4. Giả thuyết về sơ đồ tính

Trong đó, a) là dầm thực tế, và b) là sơ đồ tính của dầm.



Hình 3.4. Giả thuyết sơ đồ tính

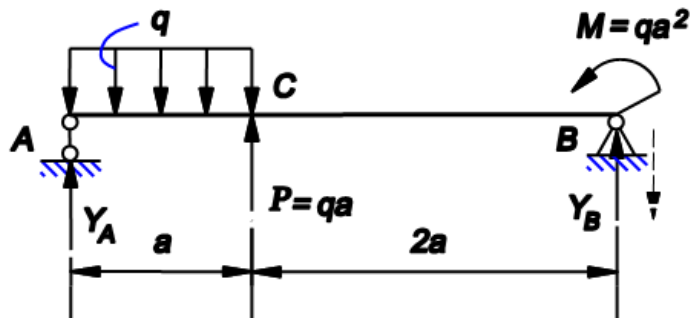
3.3. NGOẠI LỰC, NỘI LỰC VÀ ỨNG SUẤT

3.3.1. Ngoại lực

Ngoại lực tác động từ những vật thể khác hoặc môi trường xung quanh lên vật thể đang xét. Ngoại lực bao gồm lực tác động (còn gọi là tải trọng) và phản lực (hình 3.5). Chú ý rằng phản lực xuất hiện khi có tải trọng.

Người ta phân loại ngoại lực như sau:

1) Căn cứ vào cách tác dụng của ngoại lực, có thể chia làm hai loại: lực tập trung và lực phân bố.



Hình 3.5. Ngoại lực

- Lực tập trung là

lực tác dụng lên vật thể theo một diện tích truyền lực rất bé. Vì diện tích đó rất nhỏ so với kích thước của vật thể, nên có thể coi như một điểm trên vật thể. Ví dụ, áp lực của bánh xe lửa lên đường ray là một lực tập trung. Đơn vị của lực tập trung là

niuton (N) và đơn vị của ngẫu lực (mômen) tập trung là niuton – mét (Nm); cách biểu diễn lực tập trung và mômen tập trung như ở hình 3.5 (P , M , Y_A , Y_B)

- Lực phân bố là lực tác dụng một cách liên tục trên một đoạn dài hay trên một diện tích truyền lực nhất định của vật thể. Ví dụ, áp lực của gió lên tường nhà là lực phân bố. Trị số của lực phân bố trên một đơn vị (dài) hay một đơn vị diện tích gọi là cường độ của lực phân bố. Nếu lực phân bố theo đường thì cường độ của nó được ký hiệu là q và tính bằng niuton trên mét (N/m). Nếu lực phân bố theo diện tích, thì cường độ của nó được ký hiệu là P_0 và tính bằng niuton trên mét vuông (N/m^2), như khi tính áp suất (hình 3.5, q là lực phân bố đều)

Có trường hợp lực phân bố đều vì cường độ của nó có trị số bằng nhau trên suốt đoạn nó tác dụng, ngược lại cũng có trường hợp lực phân bố không đều.

2) Căn cứ vào tính chất thay đổi theo thời gian, ngoại lực có thể chia làm hai loại: Lực tĩnh và lực động.

- Lực tĩnh là lực khi tác dụng lên vật thể tăng dần dần từ không đến một giá trị nhất định rồi không thay đổi hoặc thay đổi rất ít. Dưới tác dụng của tải trọng tĩnh, các phân tử của vật thể hầu như không có gia tốc.

Ví dụ, áp lực của nước đối với thành bể chứa, trọng lượng cầu, mái nhà,... đều là những tải trọng tĩnh.

- Lực động là lực khi tác động lên vật thể làm cho các phân tử của vật thể đều có gia tốc. Ví dụ, một vật có trọng lượng lớn được kéo lên bởi dây cáp với gia tốc đều sẽ tác động lên dây cáp một lực động hay khi một vật nặng rơi lên thanh thì vật đó sẽ gây ra lực động đối với thanh... Loại lực này không được nghiên cứu trong giáo trình này.

3.3.2. Nội lực

3.3.2.1. Khái niệm nội lực

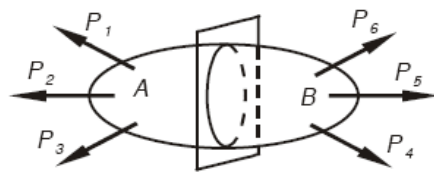
Khi ngoại lực tác động lên vật thể và làm vật thể biến dạng, thì các lực liên kết giữa các phân tử trong vật thể sẽ bị biến đổi, làm xuất hiện trong vật thể những lực chống lại sự biến dạng đó. Những lực này gọi là nội lực.

Khi ngoại lực tăng dần, nội lực cũng tăng dần để cân bằng với ngoại lực đó. Nhưng do tính chất của từng loại vật liệu, nội lực chỉ có thể tăng đến một giới hạn nhất định. Nếu ngoại lực tăng quá lớn, nội lực không tăng được nữa, lúc này vật liệu

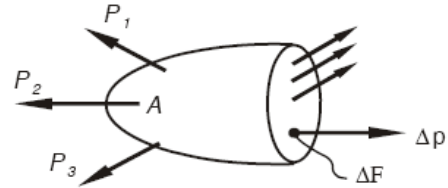
sẽ không đủ sức chống lại và sẽ bị phá hỏng. Vì vậy, việc xác định nội lực phát sinh trong vật thể dưới tác dụng của ngoại lực là một trong những vấn đề cơ bản của môn sức bền vật liệu.

3.3.2.2. Cách xác định nội lực (phương pháp mặt cắt)

Giả sử có một vật thể cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực và tưởng tượng có một mặt phẳng cắt vật thể đó làm 2 phần A và B (hình 3.6a). Giả sử bỏ đi phần B và giữ lại phần A, rõ ràng là để giữ lại sự cân bằng của phần A ta phải tác động lên toàn



Hình 3.6. a) Vật chịu lực cân bằng



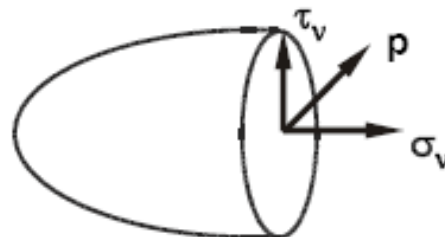
b) Nội lực trên mặt cắt

bộ mặt cắt một hệ lực phân bố. Hệ lực này chính là những nội lực muốn tìm (hình 3.6b).

Nội lực này cũng là lực tác dụng của phần B lên phần A. Do đó, ta có thể suy rộng ý nghĩa của nội lực là: *nội lực là lực tác dụng của một bộ phận này đối với bộ phận kia của vật thể.*

Dựa vào khái niệm đó và căn cứ vào nguyên lý tác dụng và phản tác dụng, ta thấy trên mặt cắt của phần B cũng có nội lực. Đó chính là lực tác dụng của phần A lên phần B. Nội lực trên mặt cắt của phần A và B có trị số bằng nhau, cùng phương nhưng ngược chiều. Vì thế muốn tính được nội lực đó, ta có thể tùy ý nghiên cứu phần A hay phần B. Vì phần A (hoặc B) đang nằm trong trạng thái cân bằng, nên nội lực và ngoại lực tác động lên phần đó hợp thành một hệ lực cân bằng. Căn cứ vào điều kiện cân bằng tĩnh học của phần đang xét ta có thể tính được nội lực đó. Hợp lực của nội lực trên mặt cắt nói chung có thể thu về một lực và một ngẫu lực, cũng có thể chỉ là một lực hay một ngẫu lực. Vậy phương pháp mặt cắt cho phép ta xác định hợp lực của nội lực trên mặt cắt.

Cần chú ý rằng nếu ta xét sự cân bằng của một phần nào đó thì



Hình 3.7. Ứng suất tại điểm K

nội lực trên mặt cắt có thể coi như ngoại lực tác dụng lên phần đó.

3.3.3. Ứng suất

Căn cứ vào giả thuyết cơ bản về sự liên tục của vật liệu ta có thể giả định rằng nội lực phân bố liên tục trên toàn mặt cắt (giả sử lấy phần A trên hình 3.6 để nghiên cứu). Tỷ số giữa trị số của nội lực tác động lên một diện tích rất bé của mặt cắt bao quanh một điểm K bất kỳ trên mặt cắt (hình 3.7) với diện tích đó, gọi là *ứng suất toàn phần tại điểm K* của mặt cắt và ký hiệu là p ; đơn vị của nó là Niu ton trên mét vuông (N/m^2).

Từ định nghĩa trên, ta có thể xem ứng suất toàn phần p là trị số của nội lực trên một đơn vị diện tích của mặt cắt. Ta biểu diễn nó bằng một vectơ đi qua điểm đang xét của mặt cắt. Phân p ra hai thành phần: một thành phần vuông góc với mặt cắt và một thành phần nằm trong mặt cắt. Thành phần vuông góc với mặt cắt gọi là ứng suất pháp tại điểm ta đang xét và ký hiệu là σ , còn thành phần nằm trong mặt cắt gọi là ứng suất tiếp tại điểm đang xét và ký hiệu là τ . Đơn vị của σ và τ cũng tương tự như đơn vị của p (N/m^2).

Dựa vào liên hệ hình học ta có thể lập được biểu thức liên hệ giữa p , σ và τ như sau:

$$P = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Nếu gọi α là góc hợp thành bởi phương của ứng suất toàn phần p với pháp tuyến của mặt cắt, thì ta có : $\sigma = p \cos \alpha$ và $\tau = p \sin \alpha$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Nhiệm vụ, đối tượng nghiên cứu của sức bền vật liệu là gì ?
2. Nêu các giả thuyết cơ bản về vật liệu. Tại sao phải có các giả thuyết cơ bản đó ?
3. Trình bày nguyên lý độc lập tác dụng.
4. Ngoại lực là gì ? Ngoại lực được phân loại như thế nào ?
5. Nội lực là gì ? Làm thế nào để tính được hợp lực của nội lực ?

6. Ứng suất là gì ? Có mấy loại ứng suất ? Đơn vị của ứng suất là gì ?

HẾT CHƯƠNG 3

Chương 4. ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

Trong các chương sau khi tính ứng suất của thanh chịu kéo, nén ta dùng đến diện tích F của mặt cắt. Đó là một đặc trưng hình học của mặt cắt. Tiếp theo, khi nghiên cứu các trường hợp thanh chịu các loại biến dạng khác, ta còn dùng đến nhiều đặc trưng hình học khác của mặt cắt. Để phục vụ tốt cho việc nghiên cứu các chương sau, trong chương này ta sẽ nghiên cứu cách xác định một số đặc trưng hình học của hình phẳng

4.1. MÔ MEN TĨNH CỦA HÌNH PHẪNG VÀ TRỌNG TÂM CỦA HÌNH PHẪNG

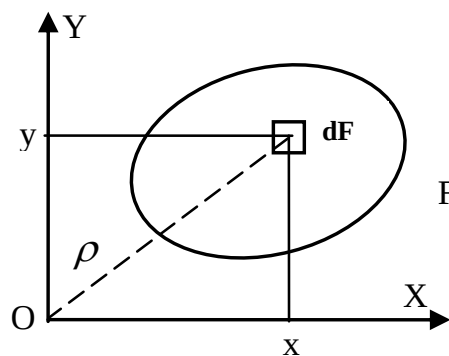
4.1.1. Định nghĩa

Có một hình phẳng diện tích là F và một hệ trục vuông góc xOy nằm trong mặt phẳng của hình (hình 4-1). Xét một vi phân diện tích dF có tọa độ là x, y . Khoảng cách từ dF tới O là ρ .

Nếu lấy tích phân biểu thức xdF và $y dF$ trên toàn bộ diện tích của hình ta được:

$$S_x = \int_F y dF$$

$$S_y = \int_F x dF \quad (4-1)$$



Hình 4.1

S_x và S_y gọi là *mômen tĩnh* của diện tích hình F đối với trục x và trục y .

Nếu dùng đơn vị diện tích là m^2 , đơn vị chiều dài là m thì đơn vị của mômen tĩnh là m^3 .

4.1.2. Công thức thông dụng

Nếu biết diện tích của hình và tọa độ trọng tâm của nó đối với hệ trục xOy, cũng như trong cơ lý thuyết, ta có:

$$\int_F x dF = x_C \cdot F \quad (4-2)$$

$$\int_F y dF = y_C \cdot F$$

Trong đó x_C, y_C là tọa độ trọng tâm C của hình, hay nói một cách khác, là khoảng cách (có mang dấu) từ trọng tâm C của hình đến các trục tọa độ O_y, O_x . F là diện tích của hình.

Do đó, ta có thể viết:

$$S_y = x_C \cdot F \quad (4-3)$$

$$S_x = y_C \cdot F$$

Từ đó có thể rút ra công thức để xác định tọa độ trọng tâm của hình phẳng:

$$y_C = \frac{S_x}{F} \quad (4-4)$$

$$x_C = \frac{S_y}{F}$$

Khi $x_C = y_C = 0$, tức là khi trục x và y đi qua trọng tâm của hình, thì $S_y = 0$ và $S_x = 0$. Cho nên *mômen tĩnh của diện tích của hình phẳng đối với trục bất kỳ qua trọng tâm của nó luôn luôn bằng không*. Người ta gọi các trục đi qua trọng tâm của hình là *trục trung tâm*.

Mômen tĩnh của hình phẳng có thể có dấu dương hoặc âm, tùy theo dấu của các tọa độ trong các công thức (4-1) hoặc (4-3).

4.1.3. Trọng tâm của hình phẳng

Khi vật rắn đồng chất có hình dạng là một tấm phẳng với bề dày không đổi thì trọng tâm sẽ nằm trên mặt phẳng của hình.

4.1.3.1. Định lý xác định vị trí trọng tâm của một vật đối xứng

Định lý: Nếu một vật rắn đồng chất có một mặt phẳng đối xứng, một trục đối xứng hay một tâm đối xứng thì trọng tâm của nó nằm trên mặt phẳng, trục hay tâm đối xứng đó.

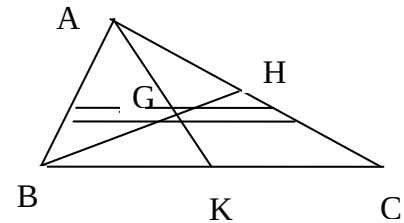
4.1.3.2. Vị trí trọng tâm của một số hình phẳng đối xứng

Từ Định lý trên dễ dàng tìm được:

- Trọng tâm khung hay diện tích hình tròn, elip và đa giác đều nằm ở tâm hình học của chúng.
- Trọng tâm của khung hay diện tích của hình bình hành, chữ nhật, thoi và vuông là giao điểm giữa các đường chéo.
- Trọng tâm của một hình xuyến là tâm hình xuyến đó.

4.1.3.3. Trọng tâm của một số hình phẳng đơn giản

a) Hình tam giác:



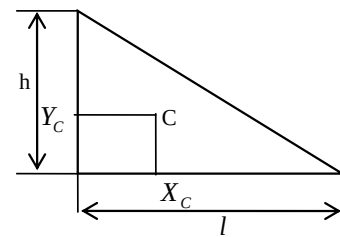
Hình 4.2

Giả sử có một tam giác ABC (hình 4.2), ta cần tìm vị trí trọng tâm của nó. Muốn vậy chia tam giác thành những băng có bề rộng rất nhỏ song song với đáy BC của tam giác. Vì bề rộng của các băng rất nhỏ nên có thể coi như một đoạn thẳng và do đó có trọng tâm ở chính giữa các băng. Quỹ tích trọng tâm các băng này chính là trung tuyến AK của tam giác. Theo bổ đề, trọng tâm của tam giác phải nằm trên trung tuyến AK này. Tương tự, trọng tâm của tam giác cũng nằm trên trung tuyến BH. Vậy trọng tâm của tam giác là nằm trên giao điểm các trung tuyến AK và BH tức là trùng với tâm hình học của tam giác.

b) Hình tam giác vuông

- Diện tích : $F = \frac{1}{2} l.h$

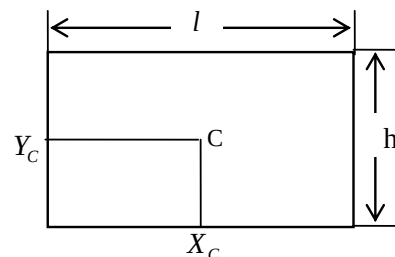
- Vị trí trọng tâm:



Hình 4.3

$$X_C = \frac{1}{3} l ; Y_C = \frac{1}{3} h \quad (\text{hình 4.3})$$

c) Hình chữ nhật (hình 4.4)



Hình 4.4

- Diện tích: $F = \frac{1}{2} l.h$

- Vị trí trọng tâm:

$$X_C = \frac{1}{2} l \quad ; \quad Y_C = \frac{1}{2} h$$

d) Hình thang

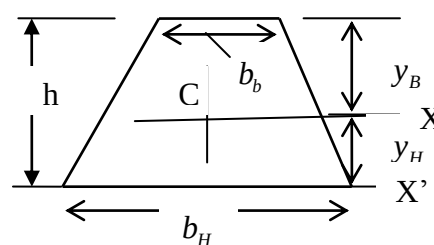
- Diện tích:

$$F = \frac{1}{2} (b_b + b_H).h$$

- Vị trí trọng tâm:

$$y_H = \frac{b_H + 2b_b}{3(b_H + b_b)} h$$

$$y_b = \frac{2b_H + b_b}{3(b_H + b_b)} h$$



Hình 4.5

4.1.3.4. Trọng tâm của hình phẳng bất kỳ

Với hình phẳng bất kỳ, ta có công thức (4-4) suy ra từ định nghĩa mômen tĩnh:

$$y_c = \frac{S_x}{F}$$

$$x_c = \frac{S_y}{F}$$

Chú ý: Khi cần tính mômen tĩnh của một hình có hình dạng phức tạp, ta chia hình đó ra làm nhiều hình đơn giản, sau đó lấy *tổng đại số* của các mômen tĩnh của các hình đơn giản hợp thành.

4.1.4. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.1

Xác định trọng tâm của mặt cắt hình chữ C (hình 4.6). Kích thước cho trên hình tính bằng mm.

Bài giải

Do là hình đối xứng qua trục x nên chắc chắn trọng tâm nằm trên trục x_0 (hình vẽ).

Ta chia mặt cắt ra làm 3 hình chữ nhật I, II, III và chọn trục y thẳng đứng đi qua trọng tâm của hình I.

Dùng công thức (4-4) để xác định trọng tâm của hình.

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{S_y^I + S_y^{II} + S_y^{III}}{F}$$

Ta có:

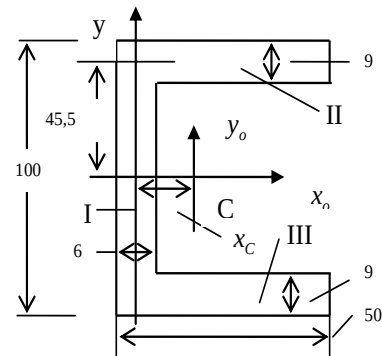
- Mômen tĩnh của hình I là $S_y^I = 0$

- Mômen tĩnh của hình II và III bằng nhau và bằng:

$$S_y^{II} = S_y^{III} = 4,4 \cdot 0,9 (2,2 + 0,3) = 9,9 \text{ cm}^3$$

Diện tích của mặt cắt: $F = 10 \cdot 0,6 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,9 = 13,92 \text{ cm}^2$. Vậy hoành độ trọng tâm đối với trục y là:

$$x_C = \frac{2 \cdot 9,9}{13,92} \approx 1,42 \text{ cm}$$



Hình 4.6

4.2. MÔ MEN QUÁN TÍNH CỦA HÌNH PHẪNG

4.2.1. Các loại mômen quán tính

Giả sử có một hình phẳng diện tích là F và hệ trục tọa độ xOy nằm trong mặt phẳng của hình (hình 4-1).

Nếu lấy tích phân biểu thức $x^2 dF$ và $y^2 dF$ trên toàn bộ diện tích của hình, ta sẽ được:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_F y^2 dF \\ J_y &= \int_F x^2 dF \end{aligned} \quad (4-5)$$

J_x , J_y gọi là *mômen quán tính* của hình phẳng đối với trục x và trục y .

Nếu lấy tích phân biểu thức $xy dF$ trên toàn bộ diện tích của hình, ta có:

$$\int_F xy dF$$

$$J_{xy} = \quad (4-6)$$

J_{xy} gọi là *mômen quán tính ly tâm* của hình phẳng đối với hệ trục xOy .

Gọi ρ là khoảng cách từ vi phân diện tích dF đến điểm O (gốc tọa độ) nằm trong mặt phẳng của hình (hình 4-1). Lấy tích phân biểu thức $\rho^2 dF$ trên toàn bộ diện tích của hình phẳng, ta được:

$$J_o = \int_F \rho^2 dF \quad (4-7)$$

J_o gọi là *mômen quán tính độc cực* của hình phẳng đối với điểm O .

Theo hình 4-1, ta có :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (4-8)$$

Thay (4-8) vào (4-7):

$$J_o = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF$$

Hay: $J_o = J_x + J_y \quad (4-9)$

Vậy *mômen quán tính cực của hình phẳng đối với một điểm bằng tổng các mômen quán tính của hình phẳng đối với hai trục vuông góc giao nhau tại điểm đó.*

Đơn vị chính của các loại mômen quán tính kể trên là m^4 .

Các loại mômen quán tính đối với một trục hay đối với một điểm luôn luôn có dấu dương vì trong các biểu thức định nghĩa của chúng ta có những bình phương của các khoảng cách x , y và ρ .

Còn mômen quán tính ly tâm có thể có dấu dương hoặc âm tùy theo dấu của các tọa độ x và y , và do đó có thể bằng không.

Khi xác định mômen quán tính của hình phẳng có hình dạng phức tạp, ta cũng dùng phương pháp như đã nói ở phần chú ý của mục 4.1.3.3.

4.2.1. Các loại hệ trục tọa độ

Nếu mômen quán tính ly tâm của một hình đối với hệ trục xOy bằng không thì người ta gọi hệ trục xOy đó là hệ trục quán tính chính, còn gọi tắt là hệ trục chính

$$J_{xy} = 0$$

Người ta chứng minh được rằng với hệ trục quán tính chính xOy, mômen quán tính của hình phẳng đối với một trong hai trục đó là cực đại ($J_{\max}$), còn đối với trục kia là cực tiểu ($J_{\min}$), so với bất kỳ trục nào khác, đi qua gốc O của hệ trục.

Nếu hệ trục chính có gốc trùng với trọng tâm của hình phẳng thì gọi là *hệ trục quán tính chính trung tâm*.

Do đó, đối với hệ trục quán tính chính trung tâm, mômen tĩnh và mômen quán tính ly tâm của hình phẳng luôn luôn bằng không:

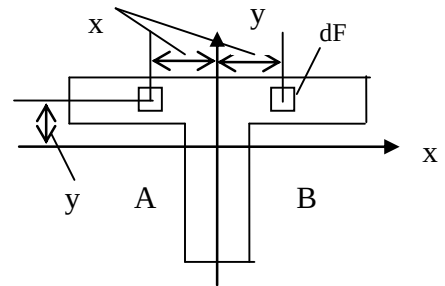
$$\left. \begin{aligned} S_x &= S_y = 0 \\ J_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Mômen quán tính của hình phẳng đối với hệ trục chính trung tâm gọi là *mômen quán tính chính trung tâm*.

Các hình phẳng có ít nhất một trục đối xứng thì rất dễ xác định được hệ trục quán tính chính trung tâm. Hệ trục chính trung tâm đó gồm trục đối xứng và trục trung tâm vuông góc với trục đối xứng. Ta hãy chứng minh điều này.

Giả sử có hình chữ T (hình 4-7). Trục đối xứng là trục y trục trung tâm x vuông góc với trục y qua trọng tâm O của hình. Nếu xem hình đã cho là hình ghép bởi hai hình A và B thì mômen quán tính ly tâm J_{xy} của toàn hình có thể tính được là:

$$J_{xy} = J_{xy}^A + J_{xy}^B$$



Hình 4.7

Trong đó, J_{xy}^A , J_{xy}^B là mômen quán tính ly tâm của

hình A và của hình B đối với hệ trục xOy. Ta xét các phân tố đối xứng dF trên mỗi phần A và B. Tung độ y của các phân tố đó có cùng trị số và cùng dấu, hoành độ x của các phân tố đó có cùng trị số và trái dấu. Do đó, sau khi thực hiện tích phân xydF theo công thức (4-6) trong mỗi phần hình F_A và F_B ta được:

$$J_{xy}^A = - J_{xy}^B$$

Vậy:

$$J_{xy} = J_{xy}^A + J_{xy}^B = - J_{xy}^B + J_{xy}^B = 0$$

tức là hệ trục xOy là hệ trục chính trung tâm của hình chữ T. Đó là điều phải chứng minh.

Một hình phẳng có thể có hai hoặc nhiều trục đối xứng. Từ kết quả trên ta có thể suy ra rằng hai trục đối xứng vuông góc với nhau sẽ tạo thành một hệ trục quán tính chính trung tâm.

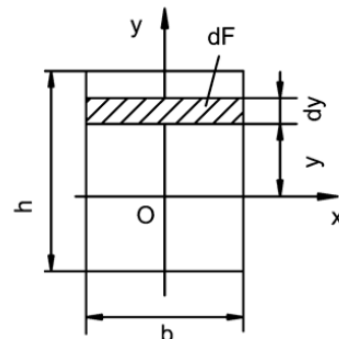
Để giải quyết các bài toán sau này về sự chịu lực của thanh ta cần phải biết các trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt thanh. Vì trong thực tế thường gặp mặt cắt có trục đối xứng, còn loại mặt cắt không có trục đối xứng thì ít gặp nên việc xác định hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt thường dễ dàng.

4.2.3. Mômen quán tính của một số hình phẳng đơn giản

4.2.3.1. Hình chữ nhật

Một hình chữ nhật có chiều dài là h , chiều rộng là b (hình 4-8). Hệ trục chính trung tâm của hình là xOy , trong đó trục x song song với cạnh b , trục y song song với cạnh h . Ta tính mômen quán tính chính trung tâm J_x . Theo công thức định nghĩa, ta có:

$$J_x = \int_F y^2 dF$$



Hình 4.8

Ta xét một vi phân diện tích dF giới hạn bởi hai đường song song với trục x , cách nhau một đoạn dy . Diện tích của nó bằng:

$$dF = b \cdot dy$$

Áp dụng công thức (4-5) ta được: $J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy$

$$= b \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} \quad \text{Vậy:} \quad J_x = \frac{bh^3}{12} \quad (4-10)$$

Đó là công thức mômen quán tính của hình chữ nhật đối với trục chính trung tâm x .

Bằng phương pháp tương tự, ta tính được mômen quán tính của hình chữ nhật đối với trục chính trung tâm y :

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (4-11)$$

4.2.3.2. Hình tam giác

Có một hình tam giác cạnh đáy là b , chiều cao là h , hệ trục xOy , trong đó trục x đi qua trọng tâm và song song với cạnh đáy b của tam giác (hình 4-9).

Cách trục x một đoạn y , ta kẻ một đường song song với trục x , đường này có độ dài b_y , tính được bằng điều kiện đồng dạng:

$$\frac{b_y}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - y}{h}$$

Do đó : $b_y = \frac{b}{h}(\frac{2h}{3} - y)$. Vậy vi phân diện tích dF bằng :

$$dF = b_y \cdot dy = \frac{b}{h}(\frac{2h}{3} - y)dy$$

Áp dụng công thức (4-5) ta được:

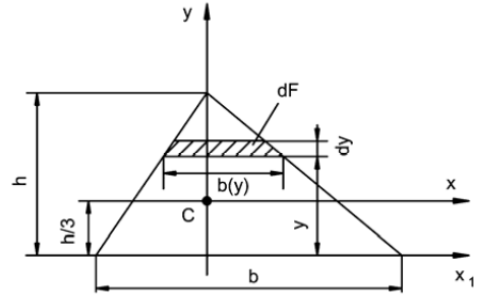
$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{b}{h}(\frac{2h}{3} - y)y^2 dy = \frac{b}{h} \left[\frac{2h}{9} y^3 - \frac{y^4}{4} \right]_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36} \quad (4-12)$$

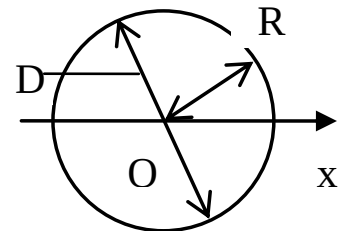
Đó là công thức tính mô men quán tính của hình tam giác đối với trục tâm x song song với cạnh đáy b của tam giác.

4.2.3.3. Hình tròn

Dựa theo công thức đã định nghĩa, ta có thể chứng minh được là mômen quán tính của hình tròn (hình 4.10) đối với trục trung tâm bất kỳ x bằng:



Hình 4.9



Hình 4.10

$$J_x = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4 \quad (4-13)$$

Vì tính chất đối xứng của hình tròn ta có thể thấy ngay là mômen quán tính của hình tròn đối với một trục trung tâm nào đó đều bằng mômen quán tính J_x . Do đó đối với trục trung tâm y thẳng góc với trục x, ta có:

$$J_x = J_y$$

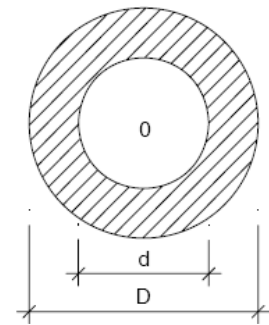
Vậy, theo công thức (4-9) ta có:

$$\begin{aligned} J_o &= J_x + J_y = 2J_x \\ J_o &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4 \end{aligned} \quad (4-14)$$

Đó là công thức tính mômen quán tính cực của hình tròn.

4.2.3.4. Hình vành khăn

Mômen quán tính J_x của hình vành khăn (hình 4.11) đối với trục trung tâm bất kỳ x của hình bằng hiệu của mômen quán tính của hình tròn có bán kính lớn với mômen quán tính của hình tròn có bán kính nhỏ đối với trục x, tức là:



Hình 4.11

$$J_x = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4}$$

$$J_o = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \eta^4) = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4) \approx 0,05D^4 (1 - \eta^4) \quad (4-15)$$

Trong đó hệ số η bằng tỷ số của hai bán kính hoặc tỷ số của hai đường kính nhỏ và lớn:

$$\eta = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}$$

Bằng phương pháp tương tự như trên, ta chứng minh được công thức tính mômen quán tính độc cực của hình vành khăn đối với trọng tâm của hình:

$$J_o = \frac{\pi R^4}{2}(1-\eta^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1-\eta^4) \approx 0,1D^4(1-\eta^4) \quad (4-16)$$

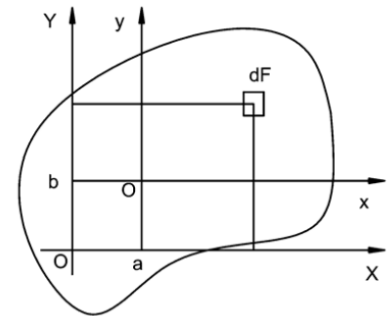
Khi xác định mômen quán tính của hình phẳng có hình dạng phức tạp, ta cũng dùng phương pháp như đã nói ở phần chú ý của mục 4.1.3.3, nghĩa là ta chia hình đó ra làm nhiều hình đơn giản, sau đó lấy tổng đại số của các mômen quán tính của các hình đơn giản hợp thành.

4.2.4. Công thức chuyển trục song song

Ở đây ta sẽ nghiên cứu cách tính mômen quán tính của hình phẳng đối với trục song song với một trục trung tâm của hình, mà đối với trục đó ta đã biết mômen quán tính của hình.

Hình 4-12 biểu thị một hình phẳng có diện tích là F , với hai trục trung tâm vuông góc Ox , Oy (O là trọng tâm của hình phẳng). Hệ trục thứ hai XOY song song với hệ trục xOy , khoảng cách giữa các trục song song x và X là b , giữa y và Y là a . Vi phân diện tích dF bất kỳ có tọa độ x , y và XY đối với hai trục xOy và XOY , các tọa độ đó có liên hệ sau đây: (hình 4.12)

$$\left. \begin{aligned} X &= x + a \\ Y &= y + b \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$



Hình 4.12

Theo công thức định nghĩa của mô men quán tính (4-5) thì đối với hệ trục XOY ta có:

$$J_X = \int Y^2 dF$$

Thay Y bằng biểu thức của nó trong (4-17) và lấy tích phân:

$$J_X = \int_F (y+b)^2 dF = \int_F (y^2 + b^2 + 2by) dF =$$

$$= \int_F y^2 dF + \int_F b^2 dF + \int_F 2by dF$$

Đưa hằng số b ngoài tích phân, ta được:

$$J_X = \int_F y^2 dF + b^2 \int_F dF + 2b \int_F y dF$$

Căn cứ từ công thức (4-1) và (4-5), ta có thể viết:

$$J_X = J_x + b^2 F + 2b.S_x$$

Vì trục x là trục trung tâm nên mômen tĩnh của hình phẳng đối với trục đó bằng không ($S_x = 0$). Do đó:

$$J_X = J_x + b^2 F \quad (4-18)$$

Với phương pháp tính tương tự như trên, ta sẽ được:

$$J_Y = J_y + a^2 F \quad (4-19)$$

Cần nhớ rằng các công thức trên chỉ dùng được khi các trục x, y đi qua trọng tâm của hình.

Từ (4-18) và (4-19) có thể phát biểu như sau:

Mômen quán tính của hình phẳng đối với một trục bất kỳ bằng mômen quán tính của hình đối với trục trung tâm song song với nó, cộng với tích của diện tích F của hình với bình phương khoảng cách giữa hai trục.

Các công thức (4-18) và (4-19) được gọi là các công thức chuyển trục song song. Chúng rất tiện dùng để tính mômen quán tính của một hình phức tạp, tạo nên bởi nhiều hình đơn giản (chữ nhật, tròn v.v...) ghép lại.

Chú ý: ta thấy J_X luôn luôn lớn hơn J_x vì số hạng thứ hai trong công thức bao giờ cũng có dấu dương; cho nên đối với một hệ trục song song, *mômen quán tính của một hình đối với trục trung tâm là mômen quán tính nhỏ nhất.*

4.2.5. Các ví dụ

Ví dụ 4.2. Xác định vị trí trọng tâm C_0 và các mômen diện tích J_x, J_y của mặt cắt cho trên hình 4.13 (đơn vị là cm)

Bài giải

Coi mặt cắt đã cho là hiệu của hai hình chữ nhật ABCD (ký hiệu là 1) và EFGH (ký hiệu là 2). Ta có:

$S_x = S_x^1 - S_x^2$, trong đó:

$$S_x^1 = F_1 \cdot y_{C_1} = (100 \times 60) \left(\frac{60}{2} \right) = 180.000 \text{ cm}^3.$$

$$S_x^2 = F_2 \cdot y_{C_2} = (30 \times 40) \left(20 + \frac{40}{2} \right) = 48.000 \text{ cm}^3.$$

Do đó,

$$S_x = S_x^1 - S_x^2 = 180.000 - 48.000 = 132.000$$

cm^3 . Và, $S_y = S_y^1 - S_y^2$, trong đó: $S_y^1 = F_1 \cdot x_{C_1} = (100 \times 60) \left(\frac{100}{2} \right) = 300.000 \text{ cm}^3$.

$$S_y^2 = F_2 \cdot x_{C_2} = (30 \times 40) \left(50 + \frac{30}{2} \right) = 78.000 \text{ cm}^3.$$

Vậy, $S_y = S_y^1 - S_y^2 = 300.000 - 78.000 = 222.000 \text{ cm}^3$. Tọa độ trọng tâm C_o của mặt cắt là:

$$x_{C_o} = \frac{S_y}{F} = \frac{222.000}{(100 \times 60) - (30 \times 40)} = 46,25 \text{ cm}; \quad y_{C_o} = \frac{S_x}{F} = \frac{132.000}{4.800} = 27,5 \text{ cm};$$

Tính mômen quán tính: $J_x = J_x^1 - J_x^2$, trong đó:

$$J_x^1 = \frac{b_1 h_1^3}{3} = \frac{100 \times 60^3}{3} = 72 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

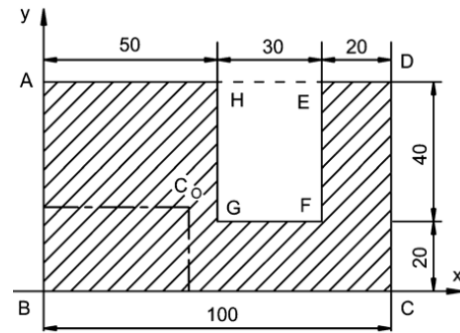
$$J_x^2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + F_2 y_{C_2}^2 = \frac{30 \times 40^3}{12} + (30 \times 40) \cdot 40^2 = 20,8 \cdot 10^5 \text{ cm}^4. \text{ Do đó,}$$

$$J_x = J_x^1 - J_x^2 = (72 - 20,8) \cdot 10^5 = 51,2 \cdot 10^5 \text{ cm}^4.$$

Ta cũng có: $J_y = J_y^1 - J_y^2$, trong đó: $J_y^1 = \frac{b_1^3 h_1}{3} = \frac{60 \times 100^3}{3} = 20 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$

$$J_y^2 = \frac{b_2^3 h_2}{12} + F_2 x_{C_2}^2 = \frac{40 \times 30^3}{12} + (30 \times 40) \cdot 65^2 = 5,16 \cdot 10^6 \text{ cm}^4. \text{ Vậy,}$$

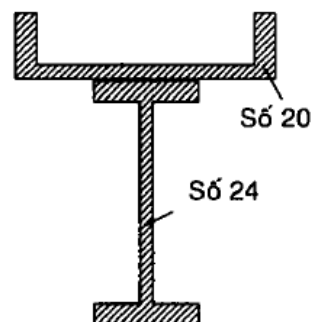
$$J_y = J_y^1 - J_y^2 = (20 - 5,16) \cdot 10^6 \text{ cm}^4 = 14,84 \cdot 10^6 \text{ cm}^4.$$



Hình 4.13

Ví dụ 4.3

Một cột được ghép bởi một thép chữ I số hiệu 24 và thép chữ U số hiệu 20 có mặt cắt ngang như hình 4.14. Xác định trọng tâm và tính mô men quán tính chính trung tâm.



Hình 4.14

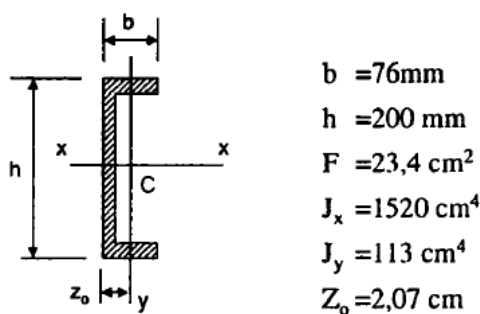
Bài giải

Chia mặt cắt có diện tích F thành 2 mặt cắt nhỏ F_1 là thép chữ U số hiệu 20, F_2 là thép chữ I số hiệu 24.

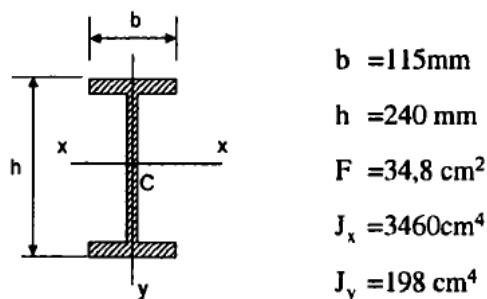
Tra bảng thép định hình theo ГОСТ 8240-56, với thép chữ U số hiệu 20 (xem hình 4.15). Tra bảng thép định hình ГОСТ 8239-56, với thép chữ I số hiệu 24 (xem hình 4.16).

Đưa kết quả tra bảng vào mặt cắt ban đầu thể hiện trên hình 4.17. Với hệ trục ban đầu oxy ta có:

$$F_1 = 23,4 \text{ cm}^2; F_2 = 34,8 \text{ cm}^2; C_1(0; 26,07); C_2(0; 12); J_{x_1}^{F_1} = 113 \text{ cm}^4; J_{y_1}^{F_1} = 1520$$



Hình 4.15

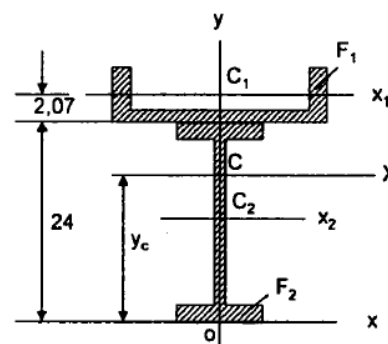


Hình 4.16

$$\text{cm}^4; J_{x_2}^{F_2} = 3460 \text{ cm}^4; J_{y_2}^{F_2} = 198 \text{ cm}^4.$$

Xác định trọng tâm mặt cắt: Với hệ trục Oxy ta có: $x_C = 0$, còn y_C tính theo công thức (4-4) như sau:

$$y_C = \frac{y_{C_1} F_1 + y_{C_2} F_2}{F_1 + F_2} = \frac{26,07 \times 23,4 + 12 \times 34,8}{23,4 + 34,8}$$



Hình 4.17

= 17,65 cm. Vậy: C (0; 17,65)

Xác định hệ trục quán tính chính trung tâm, với y là trục đối xứng, hệ trục CXy là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Tính mômen quán tính chính trung tâm: Tức tính mômen quán tính của mặt cắt đối với trục y và X. Vì $F = F_1 + F_2$, nên ta có:

$J_X = J_x^{F_1} + J_x^{F_2}$, : $J_y = J_y^{F_1} + J_y^{F_2}$. Ở đây: $J_y^{F_1} = J_x^I = 1520 \text{ cm}^4$, và $J_y^{F_2} = J_y^I = 198 \text{ cm}^4$. Nên: $J_y = J_y^{F_1} + J_y^{F_2} = 1.520 + 198 = 1718 \text{ cm}^4$.

$$J_X^{F_1} = J_{x_1}^{F_1} + b_1^2 F_1 = J_{x_1}^{F_1} + (y_{C_1} - y_C)^2 F_1 = 113 + (26,07 - 17,65)^2 \cdot 23,4 = 1772 \text{ cm}^4.$$

$$J_X^{F_2} = J_{x_2}^{F_2} + b_2^2 F_2 = J_{x_2}^{F_2} + (y_{C_2} - y_C)^2 F_2 = 3.460 + (12 - 17,65)^2 \cdot 34,8 = 4571 \text{ cm}^4.$$

Vậy, $J_X = J_X^{F_1} + J_X^{F_2} = 1.772 + 4.571 = 6343 \text{ cm}^4$.

4.3. BÁN KÍNH QUÁN TÍNH

4.3.1. Định nghĩa

Bán kính quán tính i của một hình F đối với một trục được định nghĩa bằng công thức:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} \quad (4-20)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$$

Trong đó: J_x, J_y là mômen quán tính của hình F đối với trục x và trục y; F là diện tích của hình. Nếu xOy là hệ trục chính trung tâm của hình thì i_x, i_y gọi là bán kính quán tính chính trung tâm của hình đó. Đơn vị thường dùng của i là mét (m).

4.3.2. Bán kính quán tính của một số hình đơn giản

Ở trên ta đã có các công thức mômen quán tính của các hình đơn giản. Nếu chia các mômen quán tính đó cho các diện tích tương ứng của mỗi hình, ta được bán kính quán tính của:

- Hình chữ nhật đối với các trục chính trung tâm x, y

$$i_x = \sqrt{\frac{bh^3}{12.bh}} = \frac{h\sqrt{12}}{12} = 0,288h$$

$$i_y = \sqrt{\frac{hb^3}{12.bh}} = \frac{b\sqrt{12}}{12} = 0,288b;$$

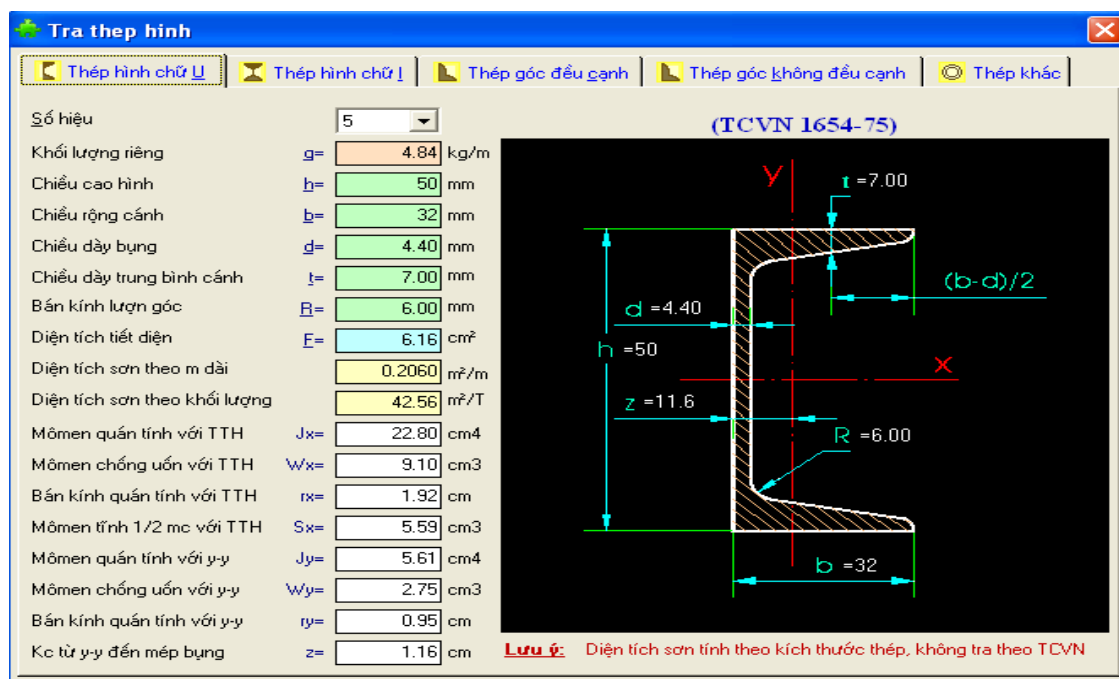
- Hình tròn đối với các trục chính trung tâm x.

$$i_x = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4\pi R^2}} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4}$$

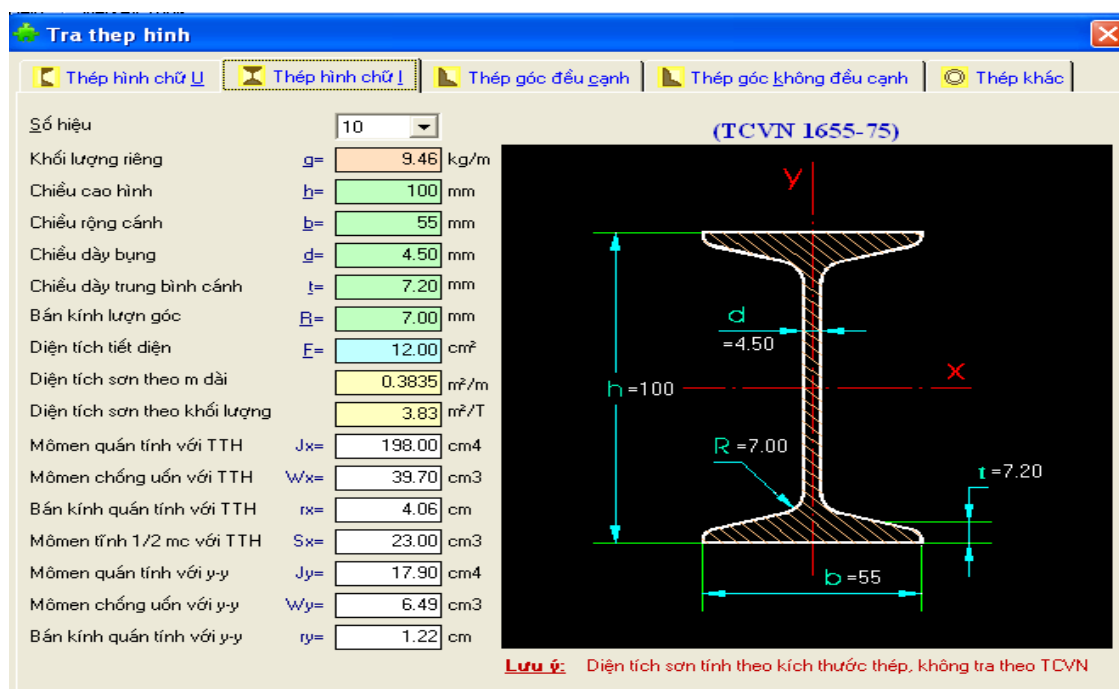
Đặc trưng hình học của hình phẳng tra trong các phần mềm hoặc bảng tra quy chuẩn.

Trước kia, tra thông số đặc trưng hình học của các loại thép hình (thép dẹt) sản xuất theo quy phạm tại các bảng được in trong phụ lục giáo trình, các quy phạm. Tuy nhiên, ngày nay do công nghệ thông tin phát triển, người ta lập trình sẵn thành các phần mềm cho tiện tra cứu. Bạn có thể tìm một cách dễ dàng trên internet hoặc các cán bộ, kỹ sư xây dựng, kiến trúc, các nhân viên kỹ thuật lập dự toán về các phần mềm có tên “*Bảng tra thép hình*”. Khi có phần mềm đơn giản này, bạn chỉ cần chọn loại thép hình, bạn sẽ có đầy đủ các thông số của loại thép hình đó.

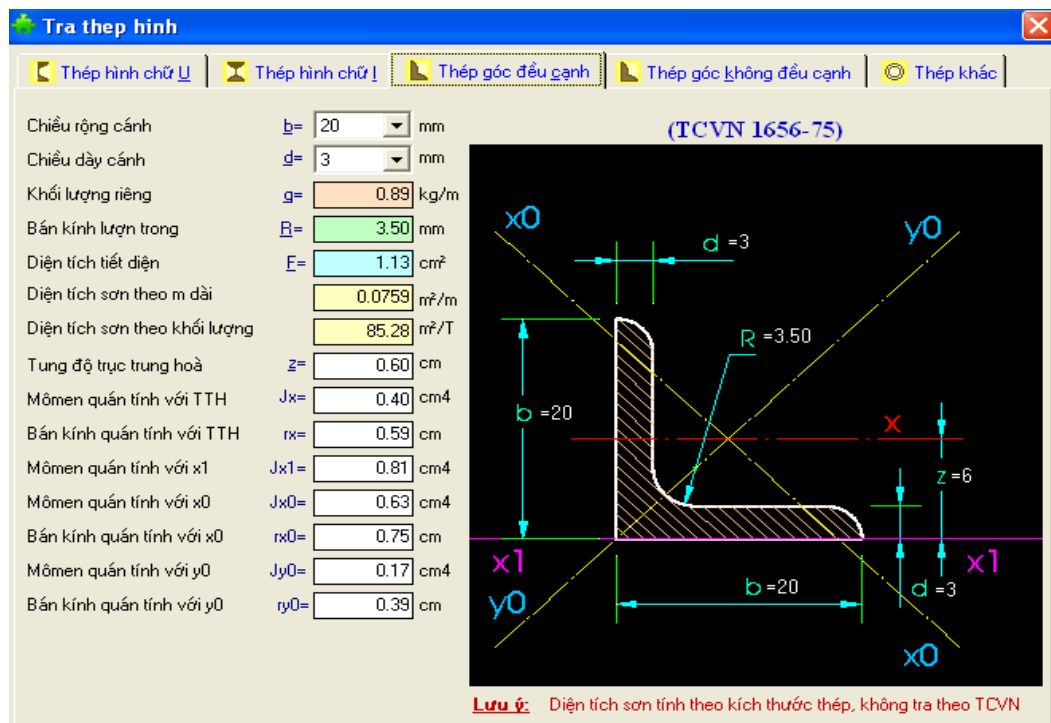
Dưới đây giới thiệu mẫu ba loại thép hình tra một cách dễ dàng trên phần mềm:



Hình 4.18



Hình 4.19



Hình 4.20

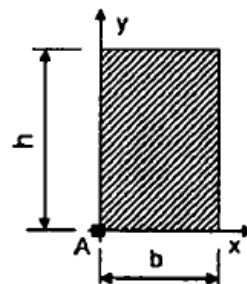
CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Nêu các đặc trưng hình học của hình phẳng. Viết công thức định nghĩa của chúng và nêu các đơn vị thường dùng.
2. Thế nào là trục trung tâm, trục chính, trục chính trung tâm? Nếu hình có một hay nhiều trục đối xứng thì hệ trục nào là hệ trục chính trung tâm? Cho ví dụ.
3. Mômen quán tính chính trung tâm là gì?
4. Chứng minh công thức chuyển trục song song để xác định mômen quán tính J_x của hình phẳng.
5. Hãy viết công thức tính mômen quán tính J_x , J_y của hình tròn và hình vuông. Tại sao đối với những hình đó $J_x = J_y$?
6. Nêu các bước tính toán để xác định mômen quán tính chính trung tâm của một hình phức tạp có một trục đối xứng và có thể chia làm nhiều hình đơn giản.

BÀI TẬP

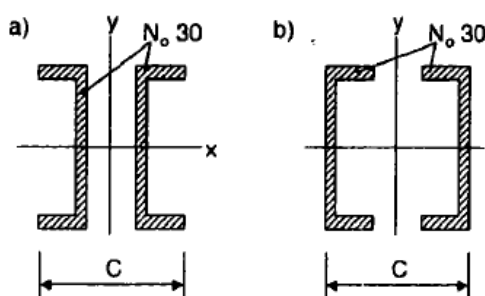
1. Xác định hệ trục quán tính chính có gốc tại A của mặt cắt hình chữ nhật có kích thước $b = 4 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$ (hình 4.21).

Tính các mômen quán tính chính.

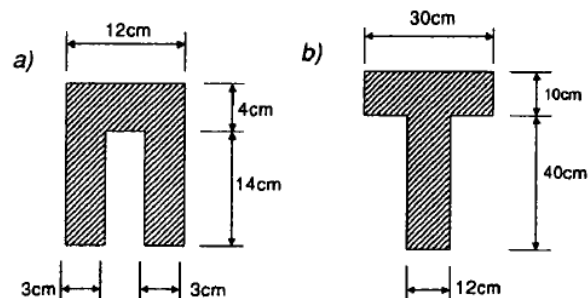


Hình 4.21

2. Tính mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt trên hình 4.22a.



Hình 4.23



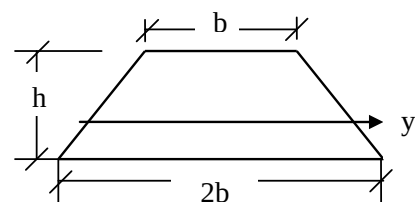
Hình 4.22

3. Tính mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt trên hình 4.22b.

4. Một cột bằng thép được ghép bởi 2 thép hình chữ U có số hiệu 30 (hình 4.23a). Hãy xác định khoảng cách C để mômen quán tính đối với 2 trục x, y là bằng nhau ($J_x = J_y$)

5. Một cột bằng thép được ghép bởi 2 thép hình chữ U có số hiệu 30 (hình 4.23b). Hãy xác định khoảng cách C để mômen quán tính đối với 2 trục x, y là bằng nhau ($J_x = J_y$)

6. Xác định mômen quán tính đối với trục trung tâm y song song với cạnh đáy của hình thang cân (hình 4.24)



Hình 4.24

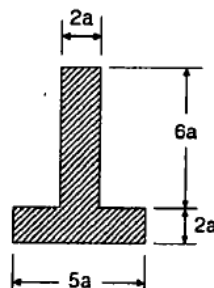
Hướng dẫn:

- Chia hình thang ra làm 2 hình tam giác, hoặc một hình chữ nhật với hai hình tam giác bên;

- Xác định trọng tâm C của hình thang;
- Vẽ trục y và tính J_y (dùng công thức chuyển trục song song).

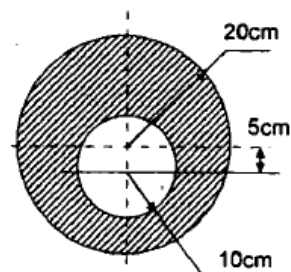
Đáp số: $J_y \approx 0,12bh^3$.

7. Xác định trọng tâm và tính mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt có hình dạng và kích thước trên hình vẽ 4.25.



Hình 4.26

8. Xác định trọng tâm của mặt cắt cho trên hình vẽ 4.26



Hình 4.25

HẾT CHƯƠNG 4

Chương 5. KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

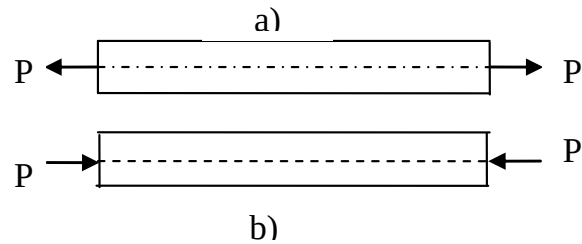
5.1. KHÁI NIỆM VỀ THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM. LỰC DỌC VÀ BIỂU ĐỒ LỰC DỌC

5.1.1. Khái niệm về thanh chịu kéo (nén) đúng tâm

Khi tác dụng vào một thanh thẳng hai lực trực đối và đặt trùng với trục thanh, ta có:

- Hoặc thanh chịu *kéo đúng tâm* nếu các lực hướng từ trong thanh ra (hình 5.1a)

- Hoặc thanh chịu *nén đúng tâm* nếu các lực hướng vào thanh (hình 5.1b).



Hình 5.1

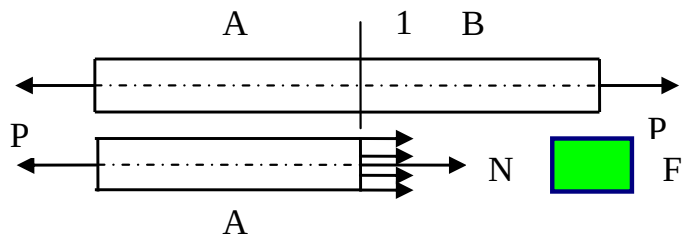
Dưới đây ta xét nội lực phát sinh trong thanh khi chịu lực.

5.1.2. Lực dọc N và biểu đồ lực dọc

Giả sử xét một thanh chịu kéo đúng tâm bởi lực P.

Để tính nội lực trên mặt cắt bất kỳ của thanh, ta dùng phương pháp mặt cắt (hình 5.2). Muốn phần A được cân bằng thì hợp lực các nội lực trên mặt cắt phải là nội lực N đặt tại trọng tâm mặt cắt và hướng theo trục của thanh.

Lực N gọi là *lực dọc*.



Hình 5.2

Trị số của lực dọc N được xác định từ điều kiện cân bằng tĩnh học là tổng hình chiếu của các lực tác dụng lên phần đang xét xuống phương trục z (trục thanh) phải bằng không :

$$\sum Z = 0, \quad -P + N = 0, \text{ hay: } N = P$$

Dấu của lực dọc N được quy ước như sau: N sẽ mang dấu dương (+) nếu nó là lực kéo, và sẽ mang dấu âm (-) trong trường hợp ngược lại.

Để biết sự biến thiên của lực dọc N tại các mặt cắt dọc theo trục thanh, ta phải vẽ một đồ thị gọi là *biểu đồ lực dọc N* .

Ví dụ 5.1

Cho thanh chịu lực như trên hình 5.3a. Cho biết: Trọng lượng riêng của vật liệu thanh là γ , diện tích mặt cắt là F , $l_1 = l_2 = l$. Vẽ biểu đồ lực dọc N . Lực $P = 1,5\gamma Fl$ tác động vào thanh tại B, chiều từ dưới lên.

Bài giải

Dựa vào phương pháp mặt cắt, ta đi thiết lập biểu thức của lực dọc N tại các mặt cắt 1-1 và 2-2 của thanh. Chiều dương quy định từ dưới lên.

Tương tượng cắt thanh tại mặt cắt 1-1 và giữ lại phần dưới (hình 5.3b), ta có:

$$\sum Z = 0, \text{ suy ra: } -\gamma Fz_1 + N_1 = 0$$

Trong đó: γFz_1 là trọng lượng phần thanh đang xét.

Rút ra: $N_1 = \gamma Fz_1$ ($N_1 > 0$ vì là lực kéo) với $0 \leq z_1 \leq l$.

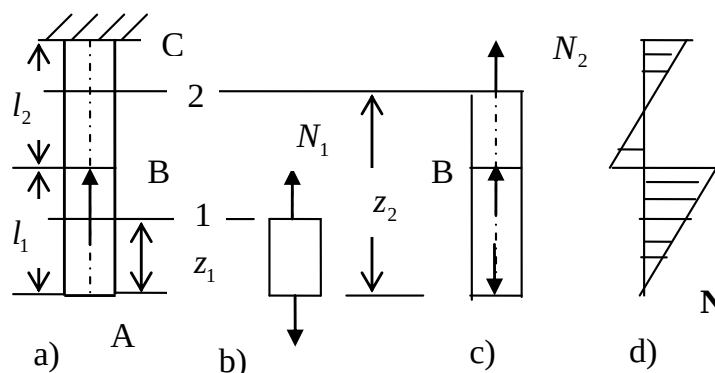
Tương tượng cắt thanh tại mặt cắt 2-2 và giữ lại phần dưới (hình 5.3c), ta có:

$$\sum Z = 0, \text{ suy ra: } -\gamma Fz_2 + P + N_2 = 0$$

Trong đó: γFz_2 là trọng lượng phần thanh đang xét.

Rút ra: $N_2 = \gamma Fz_2 - 1,5\gamma Fl = \gamma F(z_2 - 1,5l)$ với $l \leq z_2 \leq 2l$.

Biểu thức của N_1 biểu thị cho lực dọc N tại mặt cắt bất kỳ trong đoạn AB của thanh, còn biểu



Hình 5.3

thức của N_2 – trong đoạn BC của thanh. Vì các biểu thức của N_1 và N_2 khác nhau, nên rõ ràng ta không thể biểu diễn sự biến thiên của lực dọc N trong toàn thanh bởi cùng một biểu thức của N . Sự khác nhau đó xảy ra tại những mặt cắt có lực tập trung đặt trùng với trục thanh, hoặc có sự thay đổi đột ngột của cường độ lực phân

bổ dọc trục thanh. Sau này chúng ta sẽ dựa vào đặc điểm đó để phân đoạn thanh khi thành lập biểu đồ của lực dọc N trong thanh.

Để vẽ biểu đồ lực dọc N , ta lấy một đường chuẩn song song với trục thanh và trên đường chuẩn đó ta sẽ đặt những đoạn thẳng vuông góc, có độ dài biểu thị (theo một tỷ lệ đã chọn) cho trị số của lực dọc N tại mặt cắt tương ứng (hình 5.3d). Nếu giá trị dương được đặt về phía bên phải, thì giá trị âm sẽ được đặt về phía ngược lại. Vì trong trường hợp này, lực dọc N trong mỗi đoạn AB và BC là hàm bậc nhất theo z nên biểu đồ của N được biểu diễn bởi những đường thẳng xiên. Ta có:

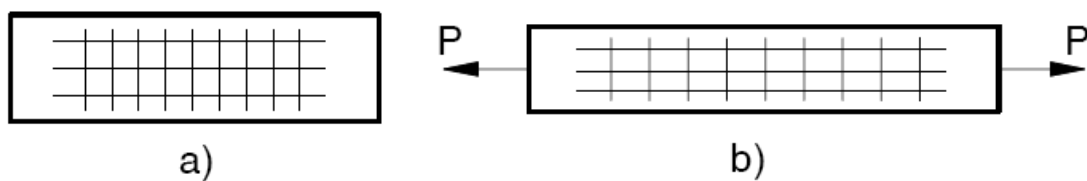
- Tại $z_1 = 0$, $N_1 = 0$; tại $z_1 = l$ (mặt cắt sát B về phía dưới), $N_1 = \gamma Fl$
- Tại $z_2 = l$ (mặt cắt sát B về phía trên), $N_2 = -0,5 \gamma Fl$; tại $z_2 = 2l$, $N_2 = 0,5 \gamma Fl$.

Tại mặt cắt B, biểu đồ có sự thay đổi đột ngột. Ta nói rằng biểu đồ có bước nhảy, giá trị bước nhảy đó bằng $P = 1,5 \gamma Fl$.

5.2. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

5.2.1. Ứng suất trên mặt cắt

Để giải quyết vấn đề tính ứng suất trên mặt cắt, trước hết ta phải khảo sát biến dạng của thanh khi chịu kéo (hoặc nén). Trước khi thanh chịu lực, ta kẻ trên mặt ngoài của thanh những đường thẳng vuông góc với trục thanh để biểu thị cho các mặt cắt của thanh và những đường thẳng song song với trục thanh để biểu thị cho những thớ dọc của thanh (hình 5.4a).



Hình 5.4

Sau khi tác dụng lực kéo P , ta nhận thấy những đoạn thẳng vuông góc với trục thanh di chuyển về phía dưới nhưng vẫn giữ thẳng và vuông góc với trục thanh, còn những đường thẳng song song với trục thanh thì dịch gần lại với nhau nhưng vẫn giữ thẳng

và song song với trục thanh (hình 5.4b). Các ô vuông trở thành các ô hình chữ nhật. Với giả thiết biến dạng xảy ra bên trong thanh cũng tương tự như biến dạng quan sát được trên mặt ngoài của thanh, ta có thể kết luận:

- 1) Các mặt cắt của thanh vẫn giữ phẳng và vuông góc với trục thanh.
- 2) Các thớ dọc của thanh vẫn giữ thẳng và song song với trục thanh.

Dựa vào hai kết luận trên, ta có thể thấy ngay rằng nội lực phân bố trên mặt cắt phải có phương song song với trục thanh, tức là có phương vuông góc với mặt cắt. Vậy trên mặt cắt của thanh chịu kéo (hoặc nén) *chỉ có ứng suất pháp σ* .

Mặt khác, dựa vào kết luận thứ nhất ta nhận thấy khi thanh bị biến dạng những thớ dọc bị chặn bởi cùng một mặt cắt đều có những độ giãn dài bằng nhau do đó theo định luật Húc, nội lực phải phân bố đều trên mặt cắt tức là *ứng suất pháp tại mọi điểm trên mặt cắt đều có trị số bằng nhau*.

Vậy ta có thể viết được biểu thức liên hệ giữa những nội lực σ phân bố trên mặt cắt với hợp lực N của chúng như sau:

$$N = \sigma \cdot F$$

Ta có thể rút ra:

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Hay có thể viết là:

$$\sigma = \pm \frac{N}{F} \quad (5-1)$$

Công thức (5-1) cho phép tính được ứng suất pháp σ , nếu biết lực dọc N và diện tích mặt cắt F ; trong đó N mang trị số tuyệt đối, còn dấu + hoặc – được lấy tùy theo lực dọc N là kéo hoặc nén. Có thể phát biểu công thức trên như sau:

“ Trị số ứng suất pháp trên mặt cắt của thanh chịu kéo hay nén bằng tỷ số giữa lực dọc ở mặt cắt đó với diện tích mặt cắt đó “.

Người ta đã chứng minh được ứng suất pháp σ trên mặt cắt vuông góc với trục thanh đạt trị số lớn nhất so với ứng suất pháp trên bất kỳ mặt cắt nghiêng nào.

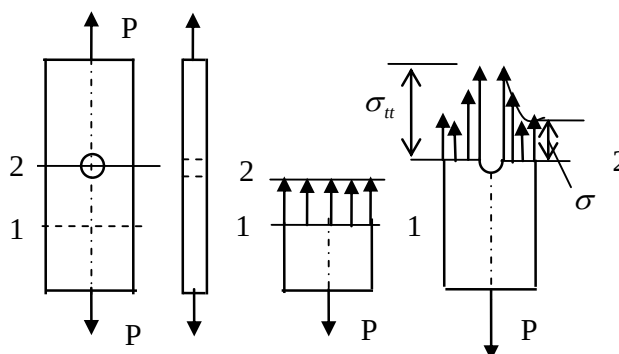
Trên đây ta đã thấy ứng suất pháp phân bố đều trên mặt cắt của thanh; nhưng điều này chỉ đúng với những mặt cắt không nằm gần nơi có *mặt cắt thay đổi đột*

ngột hoặc gần nơi có *điểm đặt của lực*. Trong thực tế ở những mặt cắt rất gần điểm đặt của lực cũng như gần nơi có mặt cắt thay đổi đột ngột, thì ứng suất không phân bố đều, mà ở đó xuất hiện ứng suất tập trung σ_{tt} .

Ví dụ, tại mặt cắt 1-1 của một thanh bị kéo như hình 5.5 thì ứng suất phân bố đều, trái lại ứng suất ở mặt cắt 2-2 không phân bố đều mà trên một diện tích rất bé tại mép lõ ứng suất có trị số lớn hơn ứng suất ở mặt cắt 1-1. Tỷ số giữa ứng suất lớn nhất σ_{tt} với ứng suất trung bình σ (xem như ứng suất phân bố đều trên mặt cắt qua lỗ) gọi là *hệ số tập trung ứng suất*, ký hiệu là α_{tt} . Ta có:

$$\alpha_{tt} = \frac{\sigma_{tt}}{\sigma}$$

Thường trị số của α_{tt} nằm trong khoảng từ 1,2 đến 3.



Hình 5.5

5.2.2. Biến dạng dọc và ngang

Dưới tác dụng của lực kéo P thanh sẽ dài thêm ra, nhưng chiều ngang hẹp bớt lại (hình 5.6) hoặc ngược lại (hình 5.7); thanh bị biến dạng vẽ bằng nét đứt.

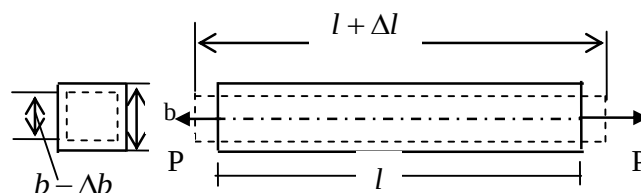
Chiều dài thanh thay đổi một đoạn $\Delta l = l_1 - l$, gọi là biến dạng dọc tuyệt đối. Nếu thanh dài ra, Δl gọi là độ giãn dọc tuyệt đối và có trị số dương; nếu thanh ngắn đi, Δl gọi là độ co tuyệt đối và có trị số âm. Đơn vị của biến dạng dọc tuyệt đối là mét (m).

Để so sánh biến dạng dọc của những thanh có chiều dài khác nhau, người ta dùng khái niệm *biến dạng dọc tương đối*, tức là độ biến dạng tuyệt đối của mỗi đơn vị chiều dài thanh. Biến dạng dọc tương đối ký hiệu bằng chữ ϵ (ép-xilon) và tính như sau:

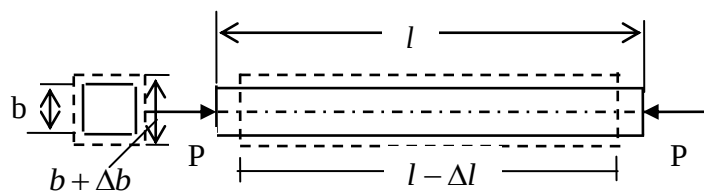
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (5-2)$$

Trong đó: ε là một hư số, cùng dấu với Δl .

Như trên đã nói: dưới tác dụng của lực kéo dọc P , thanh dài ra nhưng chiều ngang hẹp lại một đoạn $\Delta b = b_1 - b$; Δb gọi là *biến dạng ngang tuyệt đối*, Δb mang trị số dương nếu bề ngang tăng thêm, Δb có trị số âm nếu bề ngang hẹp lại.



Hình 5.6



Hình 5.7

Để so sánh biến dạng ngang của những thanh có kích thước ngang khác nhau, người ta cũng dùng khái niệm *biến dạng ngang tương đối*, tức là biến dạng tuyệt đối của mỗi đơn vị chiều ngang của thanh. Biến dạng ngang tương đối ký hiệu là ε_1 và tính như sau:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} \quad (5-3)$$

Trong đó ε_1 là một hư số cùng dấu của với Δb .

Nhiều thí nghiệm cho thấy rằng giữa ε và ε_1 có mối liên hệ với nhau như sau:

$$\mu = - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \quad \text{hay} \quad \varepsilon_1 = -\mu\varepsilon \quad (5-4)$$

Dấu (-) trước tỷ số ε_1 và ε biểu hiện chúng luôn luôn ngược nhau, nghĩa là nếu chiều dài dài thêm thì chiều ngang hẹp bớt và ngược lại.

Trong biểu thức trên, μ (muy) gọi là hệ số Poátxông hay *hệ số biến dạng ngang*, nó đặc trưng cho tính đàn hồi của vật liệu. Trị số của μ được xác định bằng thí nghiệm, hệ số này là một hư số.

Tùy từng loại vật liệu khác nhau, trị số của μ cũng khác nhau và nằm trong giới hạn từ 0 đến 0,5. Bảng (5.1) cho μ của một số vật liệu thông thường.

Bảng 5.1. Hệ số biến dạng ngang μ

VẬT LIỆU	μ	VẬT LIỆU	μ
Thép	0,25 – 0,33	Vàng	0,42
Đồng	0,31 - 0,34	Bạc	0,39
Đồng đen	0,32 - 0,35	Thủy tinh	0,25
Gang	0,23 – 0,27	Đá học	0,16 - 0,34
Chì	0,45	Bê tông	0,08 – 0,18
Nhôm	0,32 - 0,36	Gỗ dán	0,07
Kẽm	0,21	Cao su	0,47
		Nến	0,50

5.2.3. Định luật Húc

Biến dạng dọc tuyệt đối Δl được tính như sau. Qua thí nghiệm kéo, nén những mẫu làm bằng vật liệu khác nhau, nhà vật lý Rôbe Húc (Robert Hooke, người Anh) đã tìm thấy và công bố năm 1676: khi lực tác động P chưa vượt quá một giới hạn nào đó (giới hạn này tùy từng vật liệu) thì biến dạng dọc tuyệt đối Δl của mẫu thí nghiệm luôn luôn tỷ lệ thuận với lực P và biểu thức của nó ứng với các trường hợp trên hình 5.6 và hình 5.7 có dạng là :

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

hoặc, nếu chú ý rằng $N = P$ thì có thể viết :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (5-5)$$

Trong đó, E gọi là *môđun đàn hồi khi kéo (nén)* của vật liệu; nó là một hằng số vật lý đặc trưng cho khả năng chống lại sự biến dạng khi chịu lực kéo hay nén của từng loại vật liệu trong phạm vi biến dạng đàn hồi.

Trị số E xác định bằng thí nghiệm và có đơn vị là mega niuton trên mét vuông (MN/m²). Bảng 5.2 cho trị số E của một số vật liệu thông thường. Tích số EF được gọi là *độ cứng khi kéo (nén) đúng tâm*, vì tùy theo trị số EF lớn hay nhỏ thì biến dạng dọc Δl của thanh sẽ nhỏ hay lớn. Trị số Δl có thể mang dấu + hay – tùy theo trị số lực dọc N là dương hay âm.

Biểu thức (5-5) có thể viết thành :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EF}$$

Ta đã biết $\sigma = \frac{N}{F}$ và $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$. Vậy thay vào (5-5), ta có:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{hay} \quad \sigma = \varepsilon.E \quad (5-6)$$

Bảng 5.2. Mô đun đàn hồi dọc E

VẬT LIỆU	TÍNH BẰNG MN/m ²
Thép	$2,0.10^5$
Gang (xám, trắng)	$1,15.10^5 - 1,6.10^5$
Đồng và hợp kim đồng (đồng vàng, đồng đen)	$1,0.10^5$
Nhôm và đũa ra	$0,7.10^5$
Thế xây:	
Bằng đá vôi	$0,6.10^5$
Bằng gạch	$0,03.10^5$
Bê tông	$0,10.10^5 - 0,30.10^5$
Gỗ: Dọc thớ	$0,10.10^5$
Ngang thớ	$0,005.10^5$
Cao su	$0,00008.10^5$

Ghi chú: $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$, $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$.

Từ biểu thức (5-6) ta có thể phát triển như sau:

Trong kéo (nén) đúng tâm, ứng suất pháp σ tỷ lệ thuận với biến dạng tương đối ε . Đó là định luật Húc khi kéo (nén) đúng tâm.

Ví dụ 5.2

Vẽ biểu đồ lực dọc N_z . Tính ứng suất và biến dạng dọc toàn phần của thanh trên hình vẽ 5.8. Biết: $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$. Diện tích mặt cắt ngang đoạn một F_1 (ký hiệu trên hình vẽ là A_1) = 10 cm^2 , đoạn hai F_2 (ký hiệu trên hình vẽ là A_2) = 20 cm^2 .

Bài giải

- Dùng phương pháp mặt cắt xét cho 4 đoạn thanh I, II, III, và IV, và vẽ biểu đồ theo chiều dọc thanh ta được biểu đồ lực dọc (phía phải)

- Tính ứng suất: Tính ứng suất trên mặt cắt ngang mỗi đoạn là:

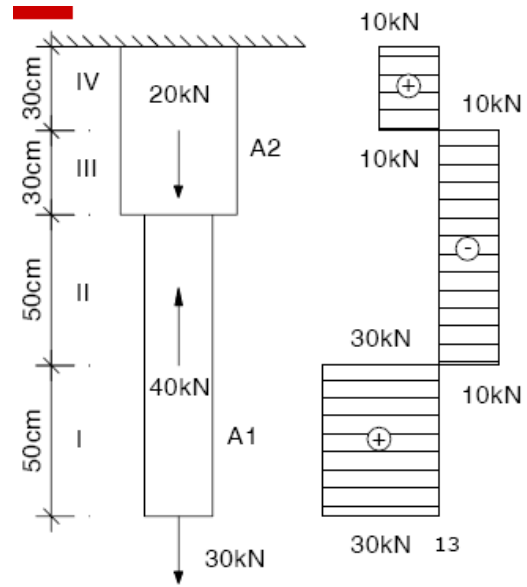
$$\sigma_I = \frac{N_z^I}{F_1} = \frac{30}{10} = 3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_z^{II}}{F_2} = \frac{-10}{10} = -1 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{III} = \frac{N_z^{III}}{F_3} = \frac{-10}{20} = -0,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_z^{IV}}{F_4} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ kN/cm}^2.$$

- Tính biến dạng dọc toàn phần: Theo công thức(5-5): $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$, tính cho toàn bộ thanh là:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4$$



Hình 5.8

$$\Delta l = \frac{30.50}{2.10^4.10} - \frac{10.50}{2.10^4.10} - \frac{10.30}{2.10^4.20} + \frac{10.30}{2.10^4.20} = 0,05 \text{ cm}$$

Vậy, sau khi chịu tác dụng của lực thanh dài thêm 0,05 cm (0,5 mm).

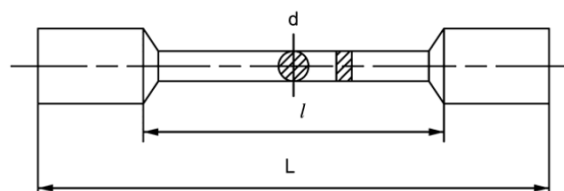
5.3. TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

Muốn biết rõ tính chất cơ học của vật liệu, ta phải đem các vật liệu ra thí nghiệm để nghiên cứu những hiện tượng sẽ xảy ra trong quá trình biến dạng của nó cho đến lúc bị phá hỏng. Thí nghiệm thường dùng nhất là thí nghiệm kéo và nén vật liệu, vì kết quả của thí nghiệm này có thể dùng chung cho nhiều trường hợp biến dạng (uốn ...).

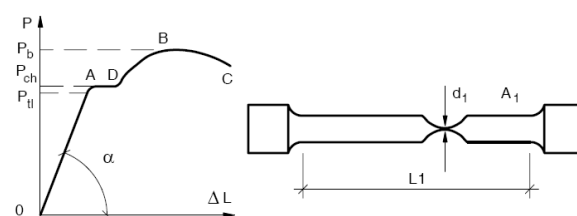
Trong điều kiện thông thường, người ta phân vật liệu ra hai loại: *vật liệu dẻo* như thép, đồng, nhôm..., *vật liệu giòn* như gang, đá, bê tông... Dưới đây ta lần lượt nghiên cứu việc thí nghiệm kéo và nén mẫu của từng loại vật liệu để rút ra những đặc trưng cơ học của chúng.

5.3.1. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Ta lấy một thanh thép non có hình dạng và kích thước theo mẫu quy định (hình 5.9) để làm thí nghiệm. Gọi phần mẫu thí nghiệm có chiều dài l là *phần làm việc* của mẫu. Đặt mẫu vào máy kéo rồi cho lực kéo P tăng lên dần từ trị số 0. Ta thấy chiều dài thanh tăng dần lên, chiều ngang thanh hẹp bớt cho đến khi lực P đạt trị số cực đại P_B thì tại một chỗ nào đó trên thanh bị thắt lại, sau đó lực kéo giảm dần cho đến một trị số P_d và thanh bị đứt tại chỗ thắt. Để thấy rõ mối quan hệ giữa độ giãn Δl và lực kéo P , ta lập hệ trục tọa độ vuông góc, với trục hoành biểu diễn các trị số của Δl và trục tung biểu diễn các trị số tương ứng của P , ta sẽ được đồ thị như hình (5.10) gọi là *biểu đồ kéo*. Đồ thị đó cho biết vật liệu khi chịu tác dụng của lực đã qua ba giai đoạn chính:



Hình 5.9



Hình 5.10

a) *Giai đoạn thứ nhất*: Trong giai đoạn này vật liệu có tính chất đàn hồi và tuân theo định luật Húc.

Ta gọi giai đoạn này là giai đoạn tỷ lệ. Trên đồ thị giai đoạn này biểu diễn bằng đoạn thẳng OA. Gọi P_{tl} (P tỷ lệ) là lực lớn nhất ở giai đoạn tỷ lệ và F_o là diện tích mặt cắt ban đầu của mẫu thí nghiệm, ta có:

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_o}$$

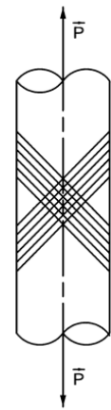
Ứng suất σ_{tl} gọi là *giới hạn tỷ lệ*. Thường giới hạn này rất khó xác định. Đối với thép Số 3, $\sigma_{tl} = 200 \text{ MN/m}^2$.

b) *Giai đoạn thứ hai*: Vì đoạn sau A thường rất ngắn nên người ta bỏ qua không khảo sát, sau giai đoạn này từ điểm sau A đồ thị bắt đầu có đoạn nằm ngang. Lúc này biến dạng của thanh tăng rõ rệt nhưng lực không tăng. Ta gọi giai đoạn này là *giai đoạn chảy dẻo*. Lực bắt đầu làm cho vật liệu dẻo ký hiệu là P_{ch} (P chảy). Gọi giới hạn chảy dẻo là:

$$\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_o}$$

Đối với thép số 3, $\sigma_{ch} \approx 240 \text{ MN/m}^2$

Đoạn nằm ngang trên đồ thị gọi là *điện chảy dẻo*. Trong giai đoạn chảy, nếu quan sát trên mặt mẫu thử được mài nhẵn ta thấy phát sinh những đường gợn không rõ lắm gọi là đường Séc-nốp. Những đường gợn này biểu hiện sự trượt của các tinh thể cấu tạo của mẫu thử (hình 5.11).



Hình 5.11

c) *Giai đoạn thứ ba*: Qua giai đoạn chảy dẻo, vật liệu lại bắt đầu đối phó với lực, khi lực đạt trị số cực đại P_b (P bền) thì có một chỗ nào đó trên mẫu thử bắt đầu thắt lại. Sau đó lực P giảm dần xuống nhưng biến dạng vẫn tăng, cho đến lúc lực P giảm đến trị số P_d ($P_{đứt}$) thì thanh sẽ bị đứt tại chỗ thắt. Gọi *giới hạn bền* là σ_b , ta có:

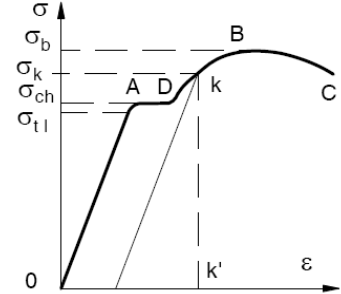
$$\sigma_b = \frac{P_b}{F_o}$$

Đối với thép số 3, $\sigma_b \approx 420 \text{ MN/m}^2$

Khi ứng suất trong mẫu đạt đến trị số σ_b , ta xem như mẫu bị phá hỏng mặc dầu thực tế nó vẫn chưa bị phá hỏng.

Giới hạn tỉ lệ (σ_{tl}), giới hạn chảy dẻo (σ_{ch}) và giới hạn bền (σ_b) là *những đặc trưng cho tính chất chịu lực của vật liệu*.

Ta thấy ngay rằng ứng suất pháp tính theo các công thức trên đây không phải là ứng suất thật, phát sinh trong mẫu khi thí nghiệm. Vì diện tích mặt cắt thanh thay đổi liên tục suốt thời gian thí nghiệm, nên ta gọi ứng suất này là *ứng suất qui ước*. Để biểu diễn mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng, ta có thể vẽ đồ thị $\sigma - \varepsilon$ (hình 5.12). Đồ thị này không phụ thuộc vào kích thước mẫu và có dạng tương tự như đồ thị biểu diễn mối liên hệ giữa P và Δl (hình 5.10).



Hình 5.12

Thực vậy, muốn có đồ thị $\sigma - \varepsilon$ ta chỉ việc chia tung độ và hoành độ của đồ thị quan hệ giữa P và Δl cho F_0 và l . Đồ thị $\sigma - \varepsilon$ cho thấy ngay các trị số của σ_{tl} , σ_{ch} và σ_b .

Nếu lập quan hệ giữa hệ số góc của đoạn thẳng xiên của đồ thị $\sigma - \varepsilon$ với các tọa độ của một điểm bất kỳ trong giới hạn của đoạn thẳng đó, thì ta có:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Mặt khác, theo định luật Húc: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, vậy: $\operatorname{tg} \alpha = E$, tức là trị số số môđun đàn hồi

E khi kéo (nén) của vật liệu chính bằng hệ số góc của đoạn thẳng xiên trong đồ thị ứng suất $\sigma - \varepsilon$. Trong khi thí nghiệm, nếu chúng ta tăng lực kéo P nhưng chưa vượt quá P_{tl} rồi bỏ lực đi thì độ giãn dài Δl sẽ mất, chiều dài thanh trở lại nguyên vẹn như lúc đầu. Nếu tăng lực P quá P_{ch} rồi bỏ lực đi thì độ giãn dài Δl không mất hoàn toàn mà còn lại một đoạn gọi là *độ giãn dài còn dư*, lúc này ta nói rằng vật liệu bị *biến dạng dẻo*. Ta nhận ra hiện tượng này qua đồ thị quan hệ giữa Δl và P do máy kéo tự động ghi lại.

5.3.2. Thí nghiệm nén vật liệu dẻo

Khi nén vật liệu dẻo, các mẫu thí nghiệm thường là hình trụ tròn có chiều cao chỉ lớn hơn đường kính một chút. Qua biểu đồ (hình 5.13a), ta thấy vật liệu dẻo khi chịu nén cũng có giới hạn tỉ lệ, giới hạn chảy dẻo nhưng không có giới hạn bền, vì

lực càng tăng thì mẫu thử càng dẹp xuống và đường kính của nó càng tăng lên (hình 5.13b). Cần chú ý đến đặc điểm của vật liệu dẻo: giới hạn tỷ lệ (cả giới hạn chảy nếu vật liệu là thép) và môđun đàn hồi đều có trị số khi kéo và khi nén xấp xỉ bằng nhau.

5.3.3. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Vật liệu dẻo chịu kéo rất kém nên bị phá hỏng đột ngột khi độ giãn dài tương đối và độ thắt tương đối còn rất nhỏ. Nhìn vào biểu đồ ta nhận thấy không có giai đoạn tỷ lệ và giai đoạn chảy dẻo (hình 5.14), mà biểu đồ là một đường cong ngay từ khi ứng suất còn rất nhỏ.

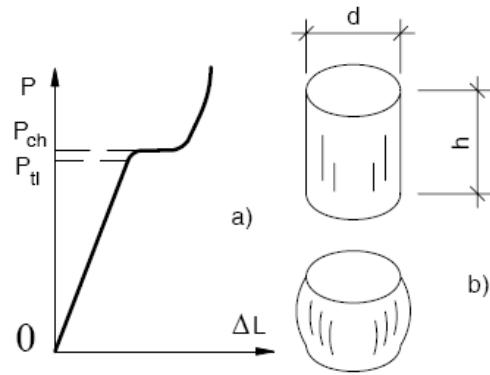
Tuy vậy, trong giới hạn làm việc thông thường, đối với một số vật liệu dẻo ta vẫn có thể áp dụng định luật Húc được. Tùy theo mức độ chính xác khi tính toán ta có thể thay đoạn cong trong một phần nào đó của đồ thị bằng một đoạn thẳng. Với vật liệu dẻo ta chỉ có giới hạn bền:

$$\sigma_b = \frac{P_b}{F_0}$$

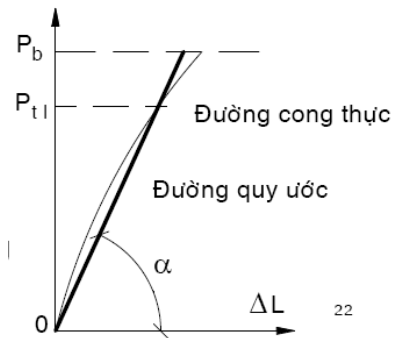
Nếu đem so sánh với giới hạn bền của vật liệu dẻo thì giới hạn này rất nhỏ.

5.3.4. Thí nghiệm nén vật liệu dẻo

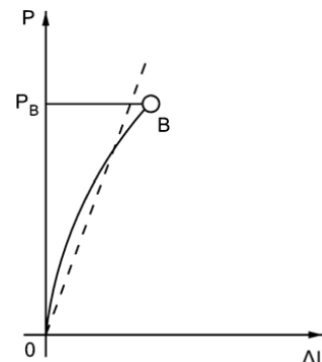
Khi bị nén, vật liệu dẻo cũng bị phá hỏng ngay khi biến dạng còn rất nhỏ. Ta chỉ có thể tìm được giới hạn bền mà thôi, nhưng giới hạn bền này có trị số lớn hơn giới hạn bền khi kéo. Hình 5.15 là đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa lực và biến dạng khi thí nghiệm nén vật liệu dẻo.



Hình 5.13



Hình 5.14



Hình 5.15

Qua các thí nghiệm trên đây, ta có thể nêu lên những điểm khác nhau giữa vật liệu dẻo và vật liệu giòn. Vật liệu dẻo khi phát sinh biến dạng nhiều mới hỏng, vật liệu giòn biến dạng ít đã bị hỏng. Vật liệu dẻo chịu kéo và nén như nhau, vật liệu giòn chịu nén tốt hơn chịu kéo rất nhiều.

5.4. TÍNH ĐỘ BỀN CHO THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

5.4.1. Khái niệm

Trên đây chúng ta đã nghiên cứu các giới hạn của vật liệu khi chịu lực: ta cần dựa vào các giới hạn này để tính toán các cấu kiện tùy theo chúng làm bằng vật liệu nào, để đảm bảo sao cho an toàn và tiết kiệm nhất.

Với vật liệu dẻo, ta thường chọn *ứng suất nguy hiểm* – ký hiệu là σ_o – là giới hạn chảy, để đảm bảo cho cấu kiện khi chịu lực không có biến dạng lớn; còn vật liệu giòn, ta chọn ứng suất nguy hiểm là giới hạn bền. Nhưng để đảm bảo cho cấu kiện làm việc được an toàn, ta phải hạn chế ứng suất lớn nhất phát sinh trong cấu kiện sao cho nó không vượt qua một ứng suất, có trị số chỉ bằng một phần của ứng suất nguy hiểm. Ứng suất này gọi là *ứng suất pháp cho phép*, ký hiệu là $[\sigma]$ và tính theo công thức :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}$$

Trong đó, n là *hệ số an toàn*. Việc lựa chọn hệ số an toàn có một ý nghĩa chính trị, kinh tế rất lớn. Nếu chọn không khéo có thể dẫn đến tình trạng lãng phí sức lao động, của cải vật chất hoặc không đảm bảo an toàn cho cấu kiện. Thường hệ số an toàn do Nhà nước quy định dựa vào một số điều kiện dưới đây:

- Tính chất của vật liệu: vật liệu dẻo hay giòn, đồng chất nhiều hay ít.
- Điều kiện làm việc của cấu kiện.
- Tính chất quan trọng, thời gian sử dụng của cấu kiện (vĩnh viễn, tạm thời,...)
- Mức độ chính xác của các giả thiết khi tính toán thiết kế. Trình độ và phương pháp thi công (hay gia công).
- Tính chất của lực tác dụng trên cấu kiện (động, tĩnh, va chạm...)

Bảng 5.3 giới thiệu ứng suất cho phép của một số vật liệu thông thường.

Bảng 5.3. Ứng suất cho phép $[\sigma]$

Vật liệu	$[\sigma]$ tính ra MN/m^2	
	Kéo	Nén
Thép xây dựng số 3	$1,6 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^2$
Thép xây dựng số 5	$1,4 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^2$
Đồng	$(0,3 - 1,2) \cdot 10^2$	
Nhôm	$(0,3 - 0,8) \cdot 10^2$	
Đuya – ra	$(0,8 - 1,5) \cdot 10^2$	
Gang xám	$(0,28 - 0,8) \cdot 10^2$	$(1,2 - 1,5) \cdot 10^2$

Cần chú ý rằng, các tính toán trên là dựa trên giả thiết thanh có kích thước ngang và kích thước dọc không khác nhau nhiều. Thực tế lại có nhiều trường hợp kích thước ngang của thanh nhỏ hơn rất nhiều so với các kích thước dọc, khi chịu nén, ngoài hiện tượng nén ra, trong thanh còn xảy ra thêm hiện tượng *uốn dọc*.

Giả sử có một thanh thẳng dài, bị nén bởi một lực P tăng dần, tác dụng đúng theo trục của nó. Dưới tác dụng của lực dọc đó, đầu tiên thanh chỉ bị nén, trục của nó lúc đó vẫn giữ thẳng. Bây giờ ta tác dụng thêm vào thanh một lực ngang Q có trị số không đáng kể, thanh sẽ bị cong rất ít. Nếu khi ta bỏ lực ngang Q mà thanh trở về trạng thái thẳng ban đầu, thì trong trường hợp đó ta nói rằng thanh đang nằm ở thể ổn định (hình 5.16).



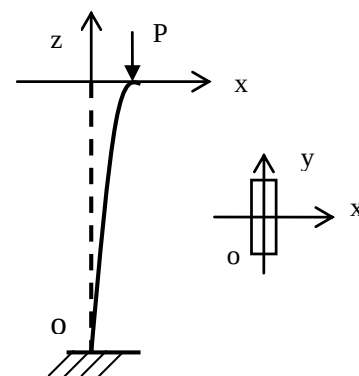
Hình 5.16

Vậy, một thanh thẳng bị nén đúng tâm sẽ được *ổn định* nếu thanh sau khi bị cong rất ít, có khả năng trở lại dạng thẳng.

Tiếp tục tăng lực nén P lên, ta thấy lực này có thể đạt đến một trị số sao cho dạng thẳng của thanh không còn là dạng ổn định nữa. Lúc đó, sau khi bỏ lực ngang Q gây ra sự uốn cong, thanh sẽ không thể trở lại dạng thẳng mà vẫn bị uốn cong. Vậy, một thanh thẳng bị nén đúng tâm sẽ *không ổn định* (hay *mất ổn định*) nếu sau khi chịu một độ cong rất bé thanh không thể trở về dạng thẳng ban đầu.

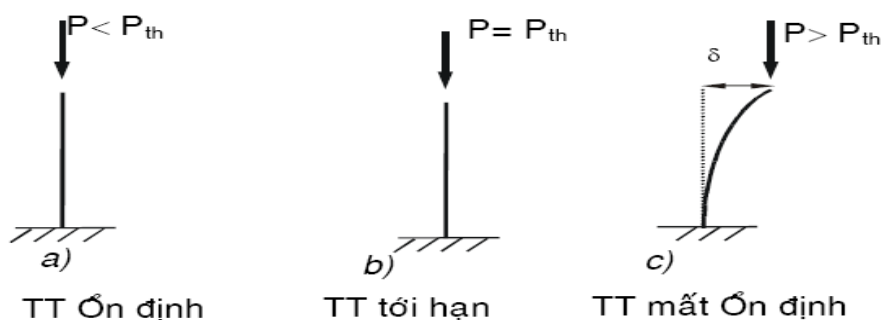
Trong thực tế, không cần có sự tác động của lực Q mà chỉ cần lực nén P vượt quá trị số đã nói trên thì dạng thẳng của thanh cũng sẽ bị mất ổn định và trục của thanh sẽ bị uốn cong. Vì ngoài lực ngang Q ra, còn có thể có những nguyên nhân khác có khả năng làm cho trục thanh bị uốn cong, ví dụ: sự lệch tâm của lực nén P , độ cong ban đầu của thanh, v.v...

Biến dạng của thanh có kèm theo sự uốn cong của trục thanh dưới tác dụng của lực nén dọc, được gọi là *uốn dọc*. Thí nghiệm cho thấy rằng nếu mômen quán tính đối với hai trục chính trung tâm của mặt cắt không bằng nhau, thì sự uốn dọc sẽ xảy ra trong mặt phẳng có *độ cứng bé nhất*, tức là các mặt cắt của thanh sẽ xoay quanh trục nào mà đối với nó mômen quán tính có giá trị nhỏ nhất. Ví dụ: thanh có mặt cắt chữ nhật (hình 5.17), vì $J_y < J_x$ nên lúc mất ổn định các mặt cắt của thanh sẽ nằm trong mặt phẳng xOz là mặt phẳng có độ cứng bé nhất của thanh.



Hình 5.17

Trị số lực nén bé nhất làm cho thanh chuyển từ trạng thái ổn định sang trạng thái



Hình 5.18

không ổn định, được gọi là lực tới hạn và ký hiệu là P_{th} . (hình 5.18a,b,c).

Muốn cho những thanh bị nén đúng tâm làm việc được bình thường, ví dụ đối với những cần trượt, biên, cột nhà, thanh cầu v.v...thì phải đảm bảo sao cho trục của chúng vẫn giữ được thẳng.

Vì vậy, khi tính toán các cấu kiện này ta phải biết tính lực tới hạn P_{th} để sao cho chúng được làm việc với những tải trọng bé hơn lực tới hạn đó, tức là có đủ độ ổn định cần thiết.

5.4.2. Tính độ bền cho thanh chịu kéo (nén) đúng tâm không xét đến uốn dọc

5.4.2.1. Điều kiện cường độ (điều kiện bền) - Ba loại bài toán cơ bản

Muốn đảm bảo điều kiện cường độ của một thanh chịu kéo hay nén đúng tâm thì ứng suất pháp lớn nhất trong thanh phải nhỏ hơn hay tối đa bằng ứng suất cho phép, nghĩa là:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \quad (5-7)$$

Từ bất đẳng thức trên ta gặp ba loại bài toán cơ bản dưới đây:

a) *Kiểm tra cường độ (kiểm tra bền)* của một thanh khi biết lực dọc N , diện tích mặt cắt F và ứng suất cho phép $[\sigma]$. Muốn đảm bảo cường độ thanh phải thỏa mãn điều kiện :

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

b) *Chọn diện tích mặt cắt F* của thanh khi biết lực dọc N và ứng suất cho phép $[\sigma]$. Ta có công thức tính diện tích mặt cắt thanh:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = [F] \quad (5-8)$$

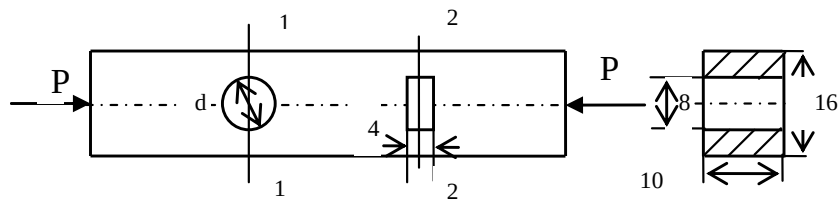
c) *Xác định trị số lớn nhất của tải trọng* mà thanh có thể chịu được theo công thức:

$$N \leq F [\sigma] = [N] \quad (5-9)$$

Dưới đây ta nghiên cứu một vài ví dụ cụ thể để làm sáng tỏ các vấn đề đã trình bày trên đây.

Ví dụ 5.3

Kiểm tra cường độ của một thanh gỗ. Trên thanh có các lỗ thủng như



Hình 5.19

hình 5.19. Lỗ tròn có đường kính $d = 6 \text{ cm}$. Lỗ chữ nhật có kích thước là 4 cm và 8 cm . Thanh chịu lực nén $P = 72 \text{ kN}$, ứng suất cho phép khi nén của gỗ là $[\sigma_n] = 10 \text{ MN/m}^2$. Bỏ qua hiện tượng tập trung ứng suất.

Bài giải

Ta phải kiểm tra cường độ của thanh ở mặt cắt có diện tích nhỏ nhất, vì ứng suất phát sinh tại mặt cắt này lớn nhất (theo công thức 5-1).

Trong các mặt cắt 1-1 và 2-2 đi qua các lỗ thủng, thì mặt cắt 2-2 nguy hiểm hơn vì diện tích chịu lực của thanh ở đây nhỏ hơn. Diện tích mặt cắt này là:

$$F = 0,10 \times 0,16 - 0,10 \times 0,08 = 8.10^{-3} \text{ m}^2$$

Ứng suất ở mặt cắt nguy hiểm là :

$$\sigma = \frac{-72}{8.10^{-3}} = -9.10^3 \text{ kN/m}^2 = -9 \text{ MN/m}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong thanh nhỏ hơn ứng suất cho phép $< 10 \text{ MN/m}^2$. Vậy thanh đảm bảo cường độ bền.

Ví dụ 5.4

Một thanh thép tròn chịu lực kéo trung tâm $P = 10^2 \text{ kN}$. Tính đường kính tối thiểu của thanh với ứng suất cho phép $[\sigma] = 1,2.10^2 \text{ MN/m}^2$.

Bài giải

Dựa vào công thức (5-8), ta có:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma]}, \text{ Hay: } \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{100.000}{1,2.10^8}, \text{ do}$$

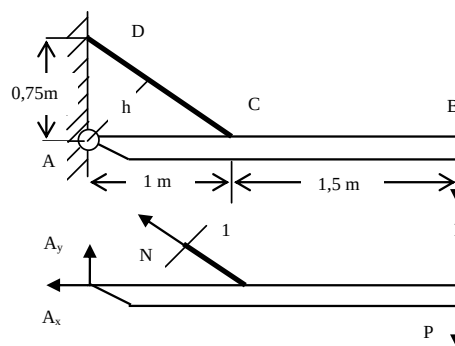
$$\text{đó : } d \geq 3,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Vậy chọn đường kính tối thiểu của thanh là :

$$d = 3,25.10^{-2} \text{ m} = 3,25 \text{ cm}$$

Ví dụ 5.5

Một thanh AB tuyệt đối cứng một đầu nối chốt vào tường, đầu kia có một lực P tác dụng (hình 5.20). Thanh được giữ nằm



Hình 5.20

ngang nhờ một thanh thép tròn CD đường kính $d = 20 \text{ mm}$. Tính giá trị lớn nhất của lực P cho biết ứng suất cho phép của thanh DC là : $[\sigma] = 1,6.10^2 \text{ MN/m}^2$

Bài giải

Thay chốt A bằng các phản lực liên kết A_x và A_y . Tưởng tượng cắt thanh CD bởi mặt cắt 1-1. Trên thanh CD sẽ xuất hiện lực dọc N , ta có:

$$\Sigma M_A = 0, \text{ hay } N.h - (1 + 1,5)P = 0 \quad (*)$$

Trong đó h là khoảng cách từ điểm A đến thanh CD. Dựa vào tính chất của tam giác đồng dạng ta có:

$$h = \frac{0,75}{\sqrt{(0,75)^2 + 1^2}}$$

Do đó, $h \approx 0,6 \text{ m}$. Thay vào (*) ta có:

$$N \approx \frac{2,5P}{0,6} \approx 4,16P.$$

Từ công thức (5-9), ta có:

$$[N] = [\sigma]F = \frac{1,6.10^8 \pi.0,02^2}{4} = 50240 \text{ N} = 50,24 \text{ kN}$$

$$\text{Do đó lực } P \text{ cho phép là: } [P] = \frac{[N]}{4,16} = \frac{50,24}{4,16} \approx 12,1 \text{ kN}$$

$$\text{Vậy: } [p] \approx 12,1 \text{ kN}$$

5.4.2.2. Tính ứng suất kể cả trọng lượng thanh

Trong những công thức đã trình bày ở trên để tính về kéo nén đúng tâm, ta bỏ qua ảnh hưởng của trọng lượng cầu kiện, vì trọng lượng này thường rất nhỏ so với độ lớn của các lực tác dụng lên cầu kiện đó. Nhưng trong trường hợp tính những thanh dài, trụ lớn, tường nặng, đập bê máy... thì ảnh hưởng của trọng lượng cầu kiện cũng rất đáng kể. Dưới đây ta xét trường hợp cụ thể đó.

a) *Thanh có mặt cắt không đổi.* Giả sử có một thanh thẳng đứng dài l , diện tích mặt cắt không đổi là F , ở đầu tự do có lực kéo đúng tâm P tác dụng. Thanh làm bằng vật liệu có trọng lượng riêng γ . Ta tìm ứng suất phát sinh trong thanh. Trước hết ta tính lực dọc N . Ta có tại mặt cắt bất kỳ 1-1: $N = P + \gamma Fz$

Ứng suất phát sinh trên mặt cắt 1-1 là

$$\sigma = \frac{P + \gamma F_z}{F}$$

Hay:
$$\sigma = \frac{P}{F} + \gamma z$$

Biểu đồ lực dọc N như hình 5.21c, do đó ứng suất phát sinh trên thanh cũng biến thiên dọc theo chiều dài thanh và có giá trị lớn nhất ở ngàm:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

Điều kiện cường độ trong trường hợp này là:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l. \leq [\sigma] \quad (5-10)$$

Diện tích mặt cắt tối thiểu của thanh tính theo công thức:

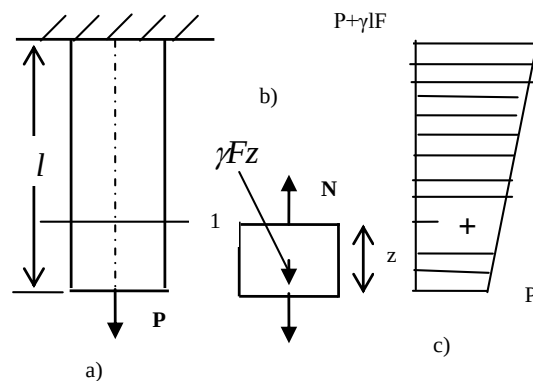
$$F \geq [F] = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l} \quad (5-11)$$

Ngoại lực lớn nhất cho phép tính theo công thức:

$$P \leq [P] = F ([\sigma] - \gamma l) \quad (5-12)$$

b) Thanh có mặt cắt thay đổi theo trục.

Trong phần trên đây ta thấy nếu kể đến trọng lượng thanh thì ứng suất thay đổi dọc theo chiều dài thanh. Nếu dùng thanh có mặt cắt không đổi thì ở đầu thanh vật liệu chưa dùng hết khả năng. Do đó, ta tìm cách làm sao cho ứng suất ở các mặt cắt không chênh lệch nhau lắm để dùng hết khả năng của vật liệu. Muốn vậy, người ta làm những thanh có mặt cắt thay đổi từng nấc (hình 5.22). Trên đoạn thanh AB, ứng suất lớn nhất phát sinh trên mặt cắt 1-1. Trên phần thanh BC ứng suất lớn nhất phát sinh trên mặt cắt 2-2. Trên phần thanh CD ứng suất lớn nhất phát sinh trên mặt cắt 3-3. Trị số các ứng suất đó là:

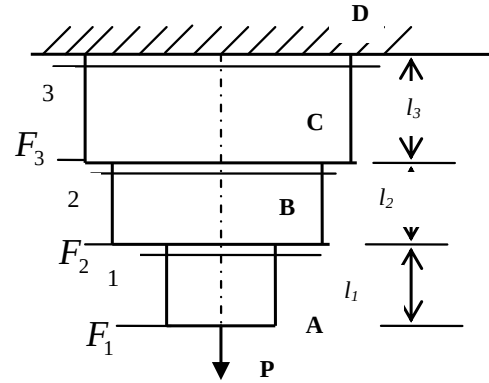


Hình 5.21

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} + \gamma_1 l_1$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{F_2} + \frac{\gamma_1 l_1 F_1}{F_2} + \gamma_2 l_2$$

$$\sigma_3 = \frac{P}{F_3} + \frac{\gamma_2 l_2 F_2}{F_3} + \gamma_3 l_3$$



Hình 5.22

Ta cũng phải chọn các mặt cắt F_1 và F_2 và F_3 sao cho thỏa mãn điều kiện là ứng suất trên mặt cắt đó tối đa là bằng ứng suất cho phép:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = [\sigma]$$

Muốn vậy, chỉ việc thay các trị số của $[\sigma]$ vào các đẳng thức trên đây sẽ tìm được F_1 , F_2 và F_3 nhỏ nhất.

Ta có:

$$[F_1] = \frac{P}{[\sigma] - \gamma_1 l_1}$$

$$[F_2] = \frac{P + \gamma_1 F_1 l_1}{[\sigma] - \gamma_2 l_2}$$

$$[F_3] = \frac{P + \gamma_2 F_2 l_2}{[\sigma] - \gamma_3 l_3}$$

Dưới đây chúng ta xét một ví dụ cụ thể.

Ví dụ 5.6

Tìm chiều dài lớn nhất của một dây thép khi treo thẳng đứng biết rằng ứng suất cho phép của thép là:

$$[\sigma] = 1,4 \cdot 10^2 \text{ MN/m}^2. \text{ Khối lượng riêng } D \text{ của thép là } 7800 \text{ kg/m}^3.$$

Bài giải

Dùng công thức (5-10), ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]$$

Vì không có lực tác động mà chỉ có trọng lượng dây ($P = 0$), nên ta có

$$\gamma l \leq [\sigma] \text{ hay: } l \leq \frac{[\sigma]}{\gamma}$$

$$\text{Vì } \gamma = Dg = 7800 \text{ kg/m}^3 \times 10 \text{ m/s}^2 = 7,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$\text{Do đó} \quad l \leq \frac{1,4 \cdot 10^8}{7,8 \cdot 10^4} \approx 1.795 \text{ m}$$

Vậy, nếu dây không treo gì thì chiều dài tối đa của thanh xấp xỉ là 1795 m.

5.4.3. Tính độ bền cho thanh chịu kéo (nén) đúng tâm có xét đến uốn dọc

5.4.3.1. Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn

Việc giải bằng lý thuyết bài toán về tính lực tới hạn cho một thanh bị nén đúng tâm có chiều dài là l và mặt cắt không đổi với liên kết ở hai đầu là những bản lề, đã được nhà bác học thiên tài Ô – le, thực hiện năm 1744.

Công thức tính lực tới hạn do Ô – le tìm ra gọi là công thức Ô – le và được mở rộng cho những trường hợp thanh có những loại liên kết khác ở hai đầu. Vì vậy, công thức Ô-le được viết dưới dạng tổng quát như sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(ml)^2} \quad (5-13)$$

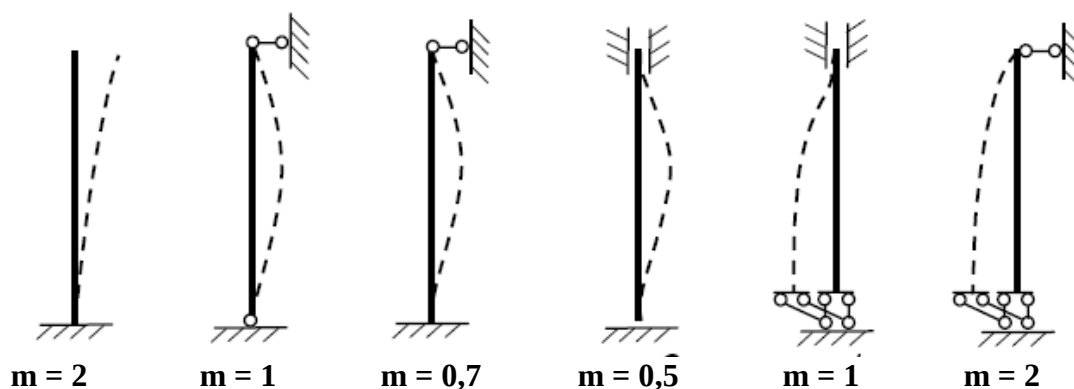
Trong đó: E – môđun đàn hồi khi kéo (hoặc nén) của vật liệu;

$J_{\min}$ – Mômen quán tính chính trung tâm nhỏ nhất của mặt cắt;

l – chiều dài của thanh;

m – hệ số chiều dài của thanh, phụ thuộc vào điều kiện liên kết ở hai đầu thanh.

Trên hình 5.23 biểu diễn một số trường hợp thanh bị nén đúng tâm với những điều kiện liên kết khác nhau ở hai đầu và những hệ số chiều dài tương ứng của thanh.



Hình 5.23

- Cả hai đầu đều bắt bản lề, $m = 1$:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$$

- Một đầu ngàm, đầu kia tự do, $m = 2$

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2l)^2}$$

- Hai đầu ngàm: $m = 0,5$

- Một đầu ngàm một đầu bắt bản lề: $m = 0,7$ v.v...

Nếu đem chia vế trái và vế phải của công thức Ô – le cho diện tích F của mặt cắt thanh, thì ta sẽ được tỷ số $\frac{P_{th}}{F}$ biểu thị cho ứng suất trong mặt cắt của thanh ứng với khi lực nén P bằng lực tới hạn P_{th} ; ứng suất này được gọi là ứng suất tới hạn và ký hiệu là σ_{th} . Vậy ta có:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(ml)^2 F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\text{hay } \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (5-14)$$

$$\text{Trong đó: } \lambda = \frac{ml}{\sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}} = \frac{ml}{i_{\min}} \quad (5-15)$$

gọi là độ mảnh của thanh và là một hư số (không có đơn vị) còn $i_{\min}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của mặt cắt.

Phân tích công thức (5-14) ta đi đến kết luận rằng, độ mảnh λ của thanh càng lớn thì ứng suất tới hạn càng nhỏ và lực nén gây ra hiện tượng uốn dọc của thanh cũng càng nhỏ, như vậy thanh sẽ càng dễ bị mất ổn định.

5.4.3.2. Phạm vi sử dụng công thức Ô – le, công thức IASINXKI

Khi chứng minh công thức lực tới hạn, Ô – le phải giả thiết rằng vật liệu tuân theo định luật Húc, vì vậy tất cả các công thức trên chỉ dùng được trong giới hạn của biến dạng đàn hồi mà thôi, nghĩa là chúng chỉ còn đúng khi định luật Húc còn được nghiệm. Công thức Ô-le đối với những vật liệu khác nhau thì có những giới hạn áp dụng riêng khác nhau. Giới hạn áp dụng của công thức Ô-le được xác định từ điều kiện ứng suất tới hạn σ_{th} trong thanh nhỏ hơn hay bằng giới hạn tỉ lệ σ_{tl} .

$$\sigma_{th} \leq \sigma_{tl}$$

Ta hãy tính giới hạn áp dụng công thức Ô –le bằng cách dựa vào bất đẳng thức trên. Thay σ_{th} bởi biểu thức của nó theo công thức (5-14), ta sẽ được:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}. \text{ Từ đó: } \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$$

Ta đặt $\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$, λ_0 - là độ mảnh của thanh có ứng suất tới hạn bằng giới hạn tỷ lệ của vật liệu thanh. Vậy giới hạn áp dụng công thức Ô – le sẽ là :

$$\lambda \geq \lambda_0$$

Ta hãy tính độ mảnh giới hạn λ_0 đối với một số vật liệu:

- Thép có $E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2$ và $\sigma_{tl} = 2.10^8 \text{ N/m}^2$ nên

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 2.10^{11}}{2.10^8}} = 100$$

- Gang, thường có $\lambda_0 = 80$

- Gỗ, thường có $\lambda_0 = 110$

Vậy, thông thường công thức Ô – le chỉ áp dụng được cho thanh bằng gang khi độ mảnh $\lambda \geq 80$, bằng thép khi $\lambda \geq 100$, và bằng gỗ khi $\lambda \geq 110$.

Trong thực tế ta hay gặp những thanh có độ mảnh λ nhỏ hơn những trị số giới hạn λ_0 nói trên. Muốn tính ứng suất tới hạn và từ đó suy ra lực tới hạn của những thanh đó, ta phải dùng công thức do Iasinxki thiết lập được từ thực nghiệm. Công thức này được gọi là công thức Iasinxki và có dạng như sau:

$$\sigma_{th} = a - b.\lambda \quad (5-16)$$

Trong đó a và b là những hệ số, phụ thuộc vào vật liệu. Ví dụ đối với thép CT₃ có thể lấy:

$$a = 3,1.10^8 \text{ N/m}^2 \text{ và } b = 1,14.10^6 \text{ N/m}^2. \text{ Đối với gỗ thì:}$$

$$a = 2,93.10^7 \text{ N/m}^2 \text{ và } b = 1,94.10^5 \text{ N/m}^2$$

Thông thường, đối với những thanh chịu nén đúng tâm có độ mảnh $\lambda < 40$ thì thực nghiệm cho thấy rằng ta có thể xem thanh chỉ bị nén đúng tâm và chỉ cần tính toán về cường độ của nó mà không cần tính về ổn định.

5.4.3.3. Tính toán về ổn định

Muốn cho một thanh chịu nén đúng tâm không bị uốn dọc (mất ổn định) thì lực nén thanh P cần thiết phải bé hơn lực tới hạn P_{th} hay nói một cách khác là, ứng suất σ trên mặt cắt thanh gây ra do lực P phải bé hơn ứng suất tới hạn σ_{th} . Vậy điều kiện ổn định của thanh sẽ là:

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{th}}{k}$$

trong đó k là hệ số an toàn; đối với các kết cấu bằng gang người ta lấy $k = 5-6$, bằng thép $k = 2-4$ và bằng gỗ $k = 3-7$.

Nếu thay $\sigma = \frac{P}{F}$ và ký hiệu

$$[\sigma]_{\text{ôđ}} = \frac{\sigma_{th}}{k} \quad (5-17)$$

Trong đó $[\sigma]_{\text{ôđ}}$ gọi là ứng suất cho phép về ổn định, thì điều kiện ổn định của thanh chịu nén đúng tâm là:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{ôđ}} \quad (5-18)$$

Từ công thức (5-17) ta thấy muốn tính ứng suất cho phép về ổn định $[\sigma]_{\text{ôđ}}$ thì trước hết ta phải tính trị số của ứng suất tới hạn σ_{th} theo công thức Ö – le (5-14) hoặc Iasinxki (5-16) tùy theo trị số mảnh λ của thanh nằm trong những phạm vi nào.

Làm như vậy nhiều khi không thuận tiện trong thực hành. Vì vậy để thay cho công thức (5-17) người ta thường hay tính ứng suất cho phép về ổn định theo công thức sau đây, có thể dùng cho bất kỳ trị số nào của độ mảnh:

$$[\sigma]_{\text{ôđ}} = \varphi [\sigma_n] \quad (5-19)$$

Bảng 5.4. Hệ số giảm ứng suất cho phép $[\varphi]$

Độ mảnh $\lambda = \frac{ml}{i_{\min}}$	Trị số đối với			
	Thép số 4,3,2, OC	Thép số 5	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31

110	0,52	0,43	-	0,25
120	0,45	0,36	-	0,22
130	0,40	0,33	-	0,18
140	0,36	0,29	-	0,16
150	0,32	0,26	-	0,14
160	0,29	0,24	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,10
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,18	-	0,08

Trong đó: $[\sigma_n]$ - ứng suất cho phép về nén.

φ - hệ số có trị số luôn luôn nhỏ hơn 1 gọi là *hệ số giảm ứng suất cho phép* (hay *hệ số uốn dọc*).

Trị số của φ phụ thuộc vào vật liệu, độ mảnh của thanh và được xác định theo bảng 5.4. Đối với những trị số trung gian của độ mảnh không có trong bảng thì hệ số φ được xác định bằng cách nội suy.

Vậy theo (5-19) điều kiện ổn định sẽ được viết lại như sau:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma_n] \quad (5-20)$$

Dùng hệ số φ , ta có thể giải bài toán ổn định tương tự như bài toán nén đúng tâm đơn giản, trong đó ứng suất cho phép được giảm theo một mức độ nào đó tùy theo trị số độ mảnh của thanh. Từ đó ta thấy rõ, nếu điều kiện ổn định của thanh được đảm bảo thì điều kiện cường độ của nó cũng sẽ được đảm bảo.

Đối với những thanh mà tại một số nơi, mặt cắt của chúng bị làm yếu đi (lỗ rivê, bulông v.v...), khi tính toán về ổn định vẫn coi như không có lỗ khuyết và tính như thường. Nhưng sau đó cần kiểm tra lại cường độ của thanh tại những mặt cắt đó.

Từ công thức cơ bản tính toán về ổn định (5-20) ta có thể suy ra ba loại bài toán về ổn định như sau:

a) *Kiểm tra sự ổn định của thanh*, khi đã biết lực nén P , mặt cắt F , chiều dài và điều kiện liên kết ở hai đầu của thanh. Ta sẽ nghiệm lại bất đẳng thức (5-20)

b) *Xác định tải trọng cho phép*, khi đã biết ứng suất cho phép về nén $[\sigma_n]$, mặt cắt F , chiều dài và điều kiện liên kết ở hai đầu của thanh. Ta có:

$$[P] \leq F \cdot \varphi \cdot [\sigma_n] \quad (5-21)$$

c) *Chọn mặt cắt*, khi đã cho lực nén P , ứng suất cho phép về nén $[\sigma_n]$, hình dạng mặt cắt, chiều dài và điều kiện liên kết ở hai đầu của thanh. Ta có:

$$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_n]} \quad (5-22)$$

Đối với loại bài toán này, cách giải quyết tương đối phức tạp vì có hai trị số F và φ chưa biết mà chỉ có một phương trình. Để giải, ta sẽ dùng phương pháp đúng dần, sẽ được trình bày rõ ở phần ví dụ.

Ví dụ 5.7

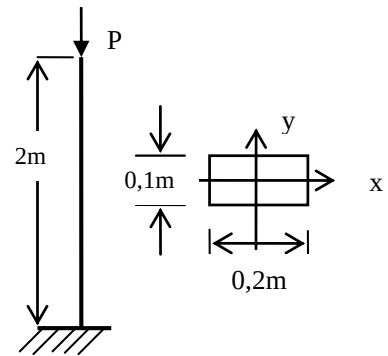
Tìm lực cho phép P đối với một cột gỗ có mặt cắt chữ nhật chịu nén đúng tâm (hình 5.24). Diện tích mặt cắt $F = (0,20 \times 0,10) \text{ m}^2$. Thanh có chiều dài $l = 2 \text{ m}$. Hệ số an toàn về ổn định yêu cầu là $k = 4$. Môđun đàn hồi của vật liệu là $E = 10^{10} \text{ N/m}^2$.

Bài giải

Thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do nên $m = 2$. Độ mảnh của thanh là :

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}}$$

$$\text{với } i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,1^3}{12}} = 0,029 \text{ m}$$



Hình 5.24

$\lambda = \frac{2.2}{0.029} = 138$. Vì độ mảnh của thanh $\lambda = 138 > \lambda_0 = 110$ nên ứng suất tới hạn

σ_{th} của thanh được tính theo công thức Ô – le:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{(3.14)^2 \cdot 1.10^{10}}{138^2} = 1.66.10^6 \text{ N/m}^2$$

Dựa vào điều kiện ổn định: $\frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{ổn}}$, ta có: $P \leq F [\sigma]_{\text{ổn}}$ hay $F \frac{\sigma_{th}}{k} = [P]$

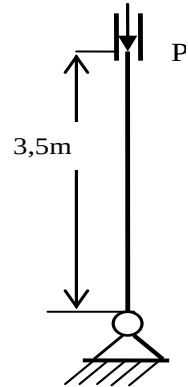
Thay trị số vào ta có:

$$[P] = 0.2. 0.1 \frac{1.66.10^6}{4} = 8300 \text{ N}$$

Vậy lực cho phép là: $[P] = 8300 \text{ N}$

Ví dụ 5-8

Chọn mặt cắt của cột ghép bởi bốn thép góc đều cạnh (hình 5.25) chịu một tải trọng nén 6.10^5 N . Chiều dài của cột 3,5 m; hai đầu cột xem như liên kết bản lề. Vật liệu là thép CT3; ứng suất cho phép $[\sigma] = 1.6.10^8 \text{ N/m}^2$. Đường kính lỗ đỉnh tán $d = 20 \text{ mm}$. Hai cạnh kề của hai thép góc cách nhau 15 mm.



Bài giải

Khi tính toán ta bỏ qua lỗ đỉnh tán. Chọn mặt cắt bằng phương pháp đúng dần. Ta lấy một trị số tùy ý φ . Vì φ biến thiên từ 0 đến 1, nên lấy gần đúng thứ nhất ta lấy trị số trung bình của nó, tức là $\varphi = \varphi_1 = 0.5$. Vậy diện tích

cần của mặt cắt của cột, theo (5-22) ta được: $F \geq \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{600.000}{1.6.10^8 \cdot 0.5} = 7.5.10^{-3} \text{ m}^2$

Diện tích của một thép góc:

$$F' = \frac{F}{4} = \frac{7.5.10^{-3}}{4} = 1.875.10^{-3} \text{ m}^2$$

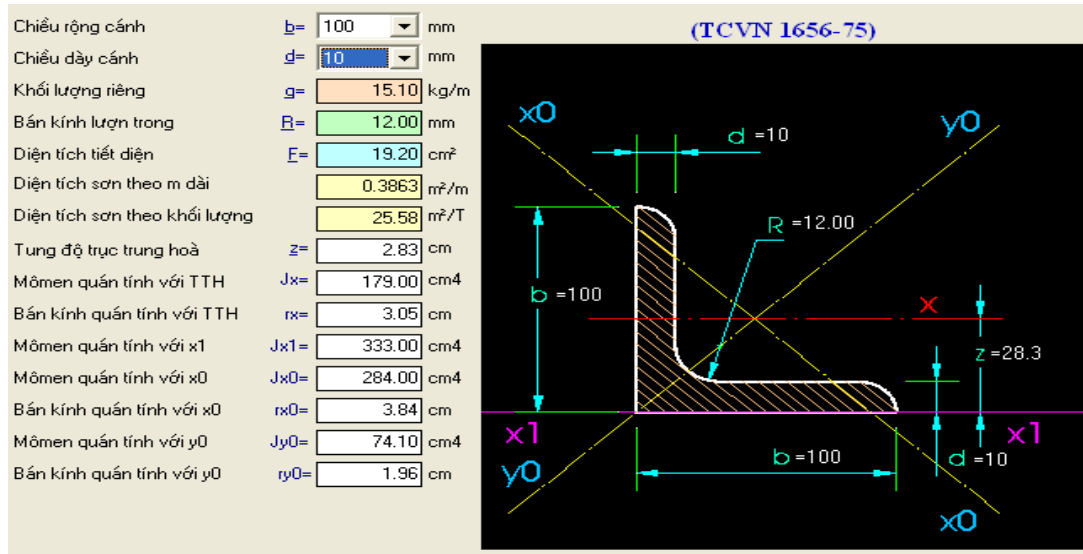
Theo bảng thép hình, ta có thể chọn thép góc 100 x 100 x 10 mm (hình 5.26) với $F = 19.2.10^{-4} \text{ m}^2$, $J_x = 1.79.10^{-6} \text{ m}^4$ và $Z_0 = 2.83.10^{-2} \text{ m}$.

Vậy đối với toàn bộ mặt cắt của cột:

Hình 5.25

$$F = 4 \times 19,2 \cdot 10^{-4} = 7,68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ và do } J_x = J_y$$

$$\text{Nên } J_{\min} = J_x = 4 \left[1,79 \cdot 10^{-6} + 1,92 \cdot 10^{-3} \left(2,83 \cdot 10^{-2} + \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{2} \right)^2 \right] = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$



Hình 5.26

Bán kính quán tính của mặt cắt

$$i_{\min} = i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{1,7 \cdot 10^{-5}}{7,68 \cdot 10^{-3}}} = 4,71 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Độ mảnh của cột, vì m = 1 nên:

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{3,50}{4,71 \cdot 10^{-2}} = 74,3$$

Theo bảng 5.4, ta tìm hệ số φ theo $\lambda = 74,3$ và ký hiệu nó là φ_2

$$\varphi_2 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 74,3 = 0,784$$

Lực nén cho phép về ổn định, theo (5-21) là:

$$[P] \leq F \cdot \varphi_2 [\sigma] = 7,68 \cdot 10^{-3} \times 0,784 \times 1,6 \cdot 10^8 = 9,63 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Lực này lớn hơn lực đã cho gấp hơn một lần rưỡi. Vậy mặt cắt chọn trên chưa được sử dụng hết, để tiết kiệm ta phải chọn mặt cắt có diện tích nhỏ hơn. Theo bảng thép hình, ta có thể chọn thép góc có số liệu nhỏ hơn và sau đó làm lại các phép tính trên

đây. Nếu thép góc được chọn lần thứ hai vẫn không phù hợp, thì ta lấy thép góc có số hiệu nhỏ hơn và cứ tiếp tục như thế, cho đến khi chọn được thép góc có mặt cắt phù hợp.

Làm như vậy, thông thường sẽ rất chậm mới đi đến kết quả cuối cùng. Theo kinh nghiệm tính toán, muốn đi đến kết quả nhanh chóng, ta nên lấy một trị số mới φ_3 là trung bình cộng của φ_1 và φ_2

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \text{ và làm lại các phép tính.}$$

Vậy lần gần đúng thứ ba, ta có:

$$\varphi_3 = \frac{0,5 + 0,784}{2} = 0,642$$

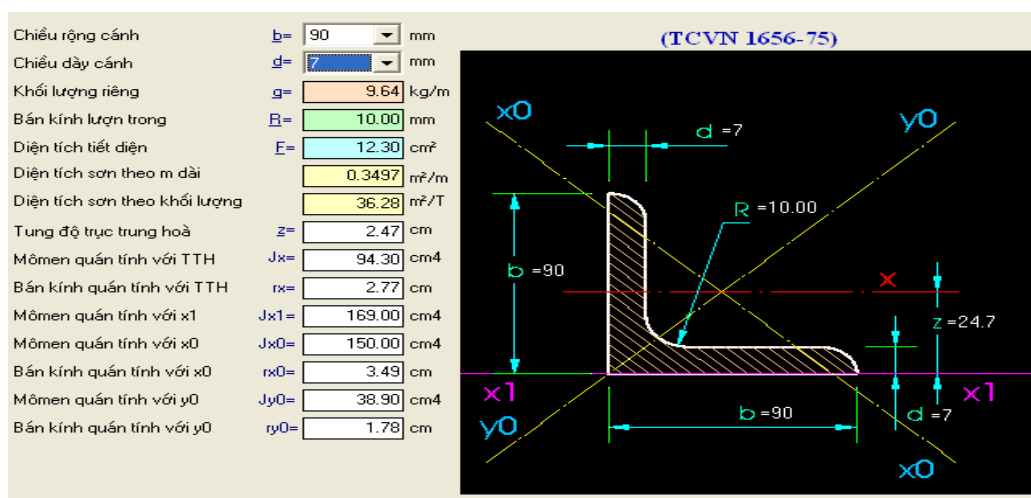
Diện tích mặt cắt tương ứng:

$$F = \frac{600.000}{0,642 \cdot 1,6 \cdot 10^8} = 5,84 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Diện tích của một thép góc

$$F' = \frac{5,84 \cdot 10^{-3}}{4} = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Vậy theo bảng thép hình, ta có thể lấy thép góc 90 x 90 x 7 với $F' = 12,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $J_x = 9,34 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ và $Z_o = 2,47 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ (hình 5.27)



Hình 5.27

Bây giờ đối với toàn bộ mặt cắt thép ta sẽ được:

$$F = 4 \times 12,3 \cdot 10^{-4} = 49,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$J_{\min} = J_x = 4 \left[9,43 \cdot 10^{-7} + 12,3 \cdot 10^{-4} \left(2,47 \cdot 10^{-2} + \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{2} \right)^2 \right] = 88,73 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

Bán kính quán tính i_x của mặt cắt:

$$i_{\min} = i_x = \sqrt{\frac{88,73 \times 10^{-7}}{49,2 \cdot 10^{-4}}} = 4,24 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Độ mảnh của thanh:
$$\lambda = \frac{1 \times 3,5}{4,24 \cdot 10^{-2}} = 82,547$$

Theo bảng 5-4 ta được

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 82,547 = 0,734$$

Lực nén cho phép về ổn định sẽ là:

$$[P] \leq 0,734 \cdot 1,6 \cdot 10^8 \cdot 49,2 \cdot 10^{-4} = 577.805 \text{ N}$$

Tức là nhỏ hơn tải trọng đã cho

$$\frac{600.000 - 577.805}{600.000} \cdot 100 = 3,7 \% < 5 \%$$

Vậy thanh được đảm bảo về ổn định.

Kiểm tra lại điều kiện cường độ, xét đến dính tán:

$$\sigma = \frac{577.805}{4(12,3 \cdot 10^{-4} - 2,0 \cdot 7 \cdot 10^{-4})} \approx 1,325 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 < [\sigma]$$

5.5. MẶT CẮT HỢP LÝ CỦA THANH

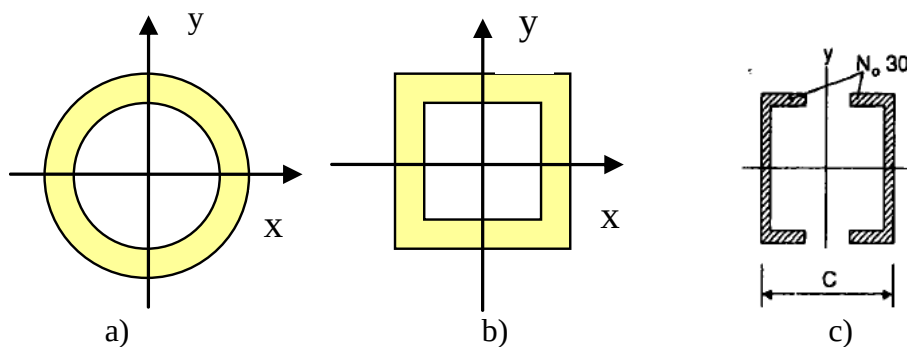
Ta hãy nghiên cứu vấn đề dạng hợp lý của mặt cắt của thanh để chịu nén đúng tâm, thanh có khả năng ổn định tốt. Như trên ta đã nói, khi mất ổn định thanh sẽ bị uốn theo phương của độ cứng nhỏ nhất và bán kính quán tính của mặt cắt càng bé thì độ mảnh của thanh sẽ càng lớn, thanh càng dễ bị mất ổn định. Từ đó ta rút ra các yêu cầu mà mặt cắt của thanh phải thỏa mãn khi thanh làm việc về uốn dọc:

1) Mômen quán tính của mặt cắt đối với các trục chính trung tâm phải bằng nhau

Như vậy, thanh sẽ có độ cứng như nhau theo tất cả các phương và tính ổn định của nó theo mọi phương cũng sẽ giống nhau.

2) Với một trị số diện tích mặt cắt đã cho ta phải chọn hình dạng mặt cắt sao cho mômen quán tính của nó lớn đến mức có thể được. Muốn vậy, vật liệu của mặt cắt phải được bố trí xa trọng tâm của nó đến mức có thể được.

Yêu cầu trên hoàn toàn được thỏa mãn nếu ta dùng những mặt cắt rỗng hình tròn và hình vuông, hoặc những mặt cắt do những thép hình I, [, L ghép lại (hình 5.28)



Hình 5.28

Nhưng, ta cũng cần chú ý rằng đối với thanh ghép ta phải đảm bảo sao cho nó được ghép rất chắc chắn bởi những thanh giằng hoặc tấm nối. Khi đó thanh ghép mới làm việc được như một thanh nguyên.

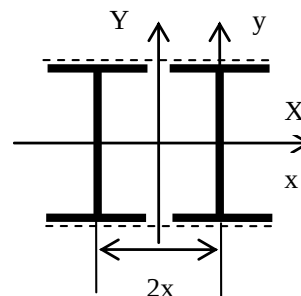
Ví dụ 5.9

Tính khoảng cách $2x$ giữa tâm của hai thép hình chữ I (hình 5.29) để cho mặt cắt đó có mômen quán tính đối với hai trục X và Y bằng nhau.

Bài giải

Gọi J_X và J_Y là mômen quán tính của mặt cắt đã được ghép lại đối với các trục chính trung tâm X và Y.

J_x và J_y là mômen quán tính của thép chữ I.



Hình 5.29

Tra bảng, ta được:

$$J_X = 2J_x$$

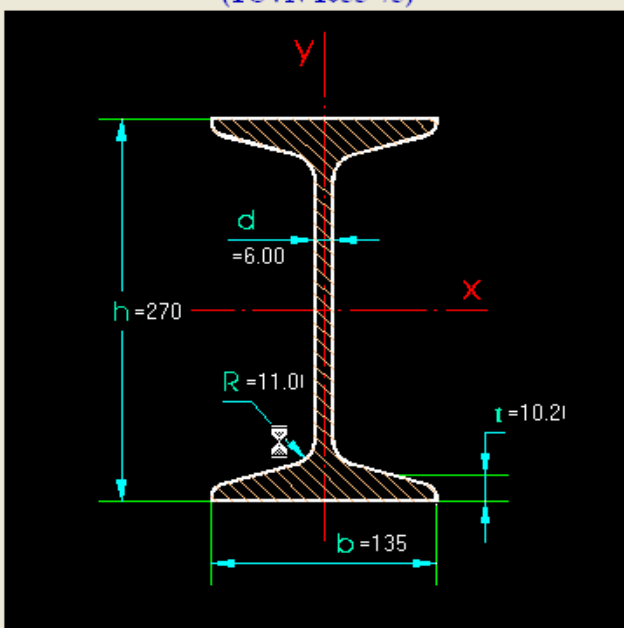
$$J_Y = 2 [J_y + x^2F]$$

Muốn cho hai mômen quán tính đó bằng nhau thì :

$2J_x = 2[J_y + x^2F]$, từ đó rút ra được:

$$x = \sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}} . \text{ Lấy thép I số 27a làm ví dụ:}$$

Số hiệu	27a	
Khối lượng riêng	$g =$	33.90 kg/m
Chiều cao hình	$h =$	270 mm
Chiều rộng cánh	$b =$	135 mm
Chiều dày bụng	$d =$	6.00 mm
Chiều dày trung bình cánh	$t =$	10.20 mm
Bán kính lượn góc	$R =$	11.00 mm
Diện tích tiết diện	$F =$	43.20 cm ²
Diện tích sơn theo m dài		1.0198 m ² /m
Diện tích sơn theo khối lượng		3.78 m ² /T
Mômen quán tính với TTH	$J_x =$	5500.00 cm ⁴
Mômen chống uốn với TTH	$W_x =$	407.00 cm ³
Bán kính quán tính với TTH	$r_x =$	11.30 cm
Mômen tĩnh 1/2 mc với TTH	$S_x =$	229.00 cm ³
Mômen quán tính với y-y	$J_y =$	337.00 cm ⁴
Mômen chống uốn với y-y	$W_y =$	50.00 cm ³
Bán kính quán tính với y-y	$r_y =$	2.80 cm



Hình 5.30

$J_x = 5,5.10^{-5} \text{ m}^4$; $J_y = 3,37.10^{-6} \text{ m}^4$. $F = 4,32.10^{-3} \text{ m}^2$. Vậy thay vào trên tính x ta được:

$$x = \sqrt{\frac{(5,5 - 0,337).10^{-5}}{4,32.10^{-3}}} = 0,109 \text{ m}$$

Vậy $2x \approx 0,22 \text{ m}$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là một thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm? Cho ví dụ thực tế.
2. Lực dọc là gì? Cách tính lực dọc.
3. Viết và giải thích công thức tính ứng suất pháp trong thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.
4. Nêu khái niệm biến dạng dọc, biến dạng ngang tuyệt đối, tương đối của một thanh. Tại sao phải có khái niệm về biến dạng dọc (ngang) tương đối? Nêu mối liên hệ giữa biến dạng dọc và biến dạng ngang.
5. Viết và giải thích công thức tính biến dạng dọc tuyệt đối, nói rõ phạm vi sử dụng của nó.
6. Trình bày các giai đoạn chịu kéo của một thanh thép non.
7. Nêu những điểm khác và giống nhau của vật liệu dẻo và giòn khi chịu kéo (nén) đúng tâm.
8. Trình bày khái niệm về độ bền của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.
9. Ứng suất cho phép là gì? Tại sao phải có ứng suất cho phép?
10. Hệ số an toàn là gì? Hệ số an toàn được xác định phụ thuộc vào những điều kiện gì? Nêu ý nghĩa của việc chọn hệ số an toàn.
11. Viết điều kiện cường độ cho một thanh chịu kéo (nén) đúng tâm. Khi tính toán về kéo (nén) đúng tâm thường gặp những bài toán cơ bản nào?
12. Viết và giải thích điều kiện cường độ về kéo (nén) đúng tâm một thanh thẳng khi kể cả trọng lượng thanh.
13. Lực tới hạn là gì? Viết và giải thích công thức Ô-le tổng quát để tính lực tới hạn.
14. Viết và giải thích công thức tính độ mảnh.
15. Ứng suất tới hạn tính theo công thức Ô-le là gì?
16. Nêu phạm vi sử dụng của công thức Ô-le trong tính toán.

17. Khi không dùng được công thức Ô-le thì dùng công thức nào để tính ổn định ?
18. Hệ số φ được gọi là gì ? Nó phụ thuộc vào những yếu tố nào ? Ý nghĩa của việc dùng hệ số φ trong bài toán ổn định ?
19. Nêu công thức cơ bản để tính về ổn định, ba bài toán về ổn định.
20. Mặt cắt của thanh chịu nén có dạng như thế nào thì hợp lý ?

BÀI TẬP

1. Đọc theo trục của thanh thép tròn gồm hai đoạn có đường kính mặt cắt khác nhau (hình 5.31), có các lực $P_1 = 30 \text{ kN}$, $P_2 = 50 \text{ kN}$ và $P_3 = 80 \text{ kN}$ tác dụng như trên hình 5.31. Diện tích mặt cắt thanh trong hai đoạn là $F_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $F_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Kích thước khoảng cách cho trên hình vẽ đo bằng m. Biết môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$.

Vẽ biểu đồ lực dọc N , tìm ứng suất trong các phần của thanh và biến dạng dọc tuyệt đối của thanh. Khi tính không kể trọng lượng thanh.

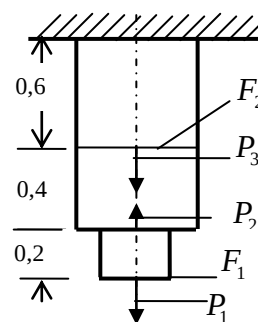
2.

Một thanh thép thẳng chịu lực $P_1 = 30 \text{ kN}$, $P_2 = 50 \text{ kN}$, và $P_3 = 80 \text{ kN}$ như hình vẽ 5.32. Kích thước khoảng cách cho trên hình vẽ đo bằng m. Thanh có diện tích mặt cắt không đổi là $F = 4 \text{ cm}^2$.

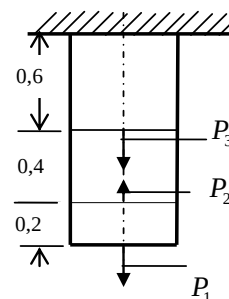
Vẽ biểu đồ lực dọc, tính ứng suất ở từng phần của thanh và biến dạng dọc tuyệt đối của chúng.

3.

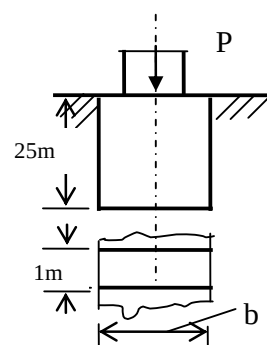
Xác định bề dày b của một móng (kể cả trọng lượng móng) như cho trong hình vẽ 5.33. Biết rằng tải trọng tác dụng lên móng là $P = 2,8 \cdot 10^2 \text{ kN/m}$, khối lượng riêng của móng là $D = 2000 \text{ kg/m}^3$. Ứng suất cho phép về nén của móng là $[\sigma_n] = 0,25 \text{ MN/m}^2$



Hình 5.31



Hình 5.32



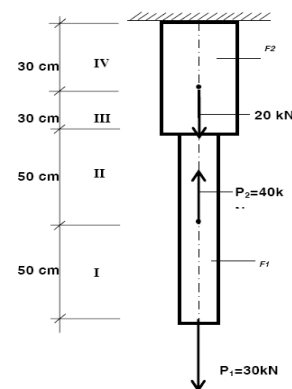
Hình 5.33

4.

Thanh có kích thước mặt cắt khác nhau, có kích thước khoảng cách và chịu lực như hình vẽ 5.34.

Biết môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; Diện tích mặt cắt thanh trong hai đoạn là $F_1 = 10 \text{ cm}^2$, $F_2 = 20 \text{ cm}^2$; $P_1 = 30 \text{ kN}$, $P_2 = 40 \text{ kN}$, $P_3 = 20 \text{ kN}$.

Vẽ biểu đồ lực dọc, tính ứng suất và biến dạng dọc tuyệt đối của thanh.



Hình 5.34

5. Xác định lực nén cho phép đối với một cột làm bằng gỗ, chiều dài 3 m, coi như hai đầu bị bắt bản lề. Mặt cắt của cột là tròn, với đường kính $d = 0,24 \text{ m}$, ứng suất về nén $[\sigma_n] = 10^7 \text{ N/m}^2$. (Đáp số: $[P] = 3,62 \cdot 10^5 \text{ N}$)

6. Xác định lực tới hạn cho một thép góc đều cạnh (100x100x10) mm và dài 1,2 m, khi một đầu bị ngàm, một đầu tự do. Môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. (Đáp số: $P_{th} = 2,50 \cdot 10^5 \text{ N}$)

7. Tính P_{th} và σ_{th} của một cột làm bằng thép số 3 có mặt cắt ngang hình chữ I số 22. Cột có liên kết khớp hai đầu. Biết hệ số môđun đàn hồi $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{tl} = 21 \text{ kN/cm}^2$, $\lambda_0 = 100$; các hằng số công thức Iasinxki: $a = 33,6 \text{ kN/cm}^2$; $b = 0,147 \text{ kN/cm}^2$.

Xét cho 2 trường hợp sau:

a) Chiều cao của cột 3,0 m;

b) Chiều cao của cột : 2,25 m

(Đáp số: a) $P_{th} = 363,62 \text{ kN}$; $\sigma_{th} = 11,88 \text{ kN/cm}^2$; b) $P_{th} = 623,32 \text{ kN}$; $\sigma_{th} = 20,37 \text{ kN/cm}^2$)

8. Chọn số hiệu thép chữ I cho thanh dài 2 m, liên kết khớp hai đầu, chịu lực nén $P = 230 \text{ kN}$.

Biết vật liệu là thép số 2 có $[\sigma_n] = 14 \text{ kN/cm}^2$ (Đáp số: Thép chữ I số hiệu 20)

9. Một cột ghép bởi hai thanh thép chữ [số hiệu 27a theo như hình vẽ 5.35. Cột bị ngàm chặt một đầu và một đầu tự do, chiều dài của cột $l = 6 \text{ m}$. Vật liệu là thép CT3 có $[\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

Hãy xác định:

- Khoảng cách $2x$ giữa lưng hai thép chữ [để cho $J_x = J_y$
- Tính lực nén cho phép

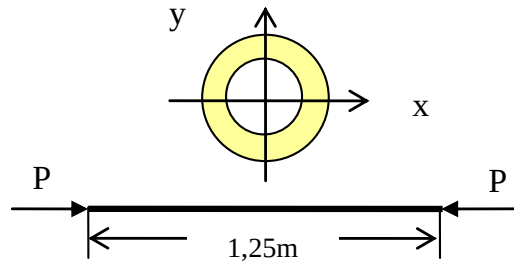
(Đáp số: $2x = 16 \text{ cm}$; $[P] = 6,3 \cdot 10^5 \text{ N}$)

10. Chọn mặt cắt vuông của cột gỗ dài 3,0 m, chịu nén bởi lực $P = 6 \cdot 10^5 \text{ N}$. Biết ứng suất cho phép về nén $[\sigma_n] = 9 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Các đầu cột xem như bắt bản lề.

(Đáp số: Mặt cắt $(0,125 \times 0,125) \text{ m}^2$)

11.

Kiểm tra ổn định của thanh giằng trong hệ thống tay lái ô tô có sơ đồ tính như hình vẽ 5.36. Cho biết lực nén $P = 9600 \text{ N}$, đường kính ngoài của thanh $d_1 = 28 \text{ mm}$, đường kính trong $d_2 = 20 \text{ mm}$ và chiều dài $l = 1,25 \text{ m}$, vật liệu : CT5, có $[\sigma] = 1,4 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$.



Hình 5.36

12.

Chọn mặt cắt của một cột bằng thép chữ I, hai đầu coi như bị ngàm ($m = 0,5$), chiều dài $l = 5 \text{ m}$, chịu một lực nén $P = 5,8 \cdot 10^5 \text{ N}$. Vật liệu CT3, có ứng suất cho phép $[\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

(Đáp số: Thép chữ I, số hiệu 30a)

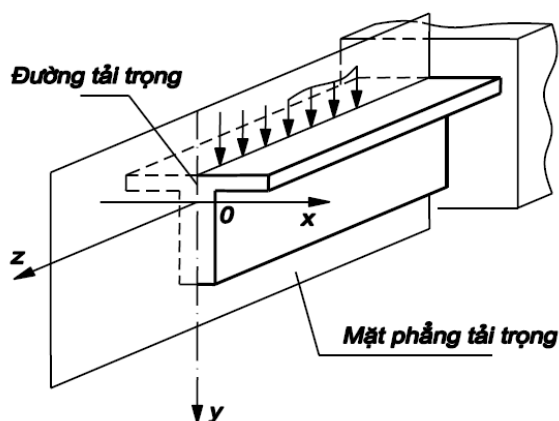
HẾT CHƯƠNG 5

Chương 6. UỐN NGANG PHẪNG

6.1. KHÁI NIỆM CHUNG

6.1.1. Định nghĩa về uốn phẳng

Ta sẽ xét những thanh thẳng mặt cắt có trục đối xứng; trục đối xứng đó và trục thanh tạo thành *mặt phẳng đối xứng* của thanh. Những thanh đó sẽ chịu *uốn phẳng* nếu thanh cân bằng dưới tác dụng của các lực nằm trong mặt phẳng đối xứng của thanh; những lực này có thể là lực tập trung hoặc phân bố có phương vuông góc với trục của thanh, hoặc là những ngẫu lực



Hình 6.1

Mặt phẳng chứa các ngoại lực gọi là *mặt phẳng tải trọng*. Hình 6.1 cho ta một ví dụ về một dầm chịu uốn phẳng: mặt phẳng tải trọng trùng với mặt phẳng đối xứng của thanh.

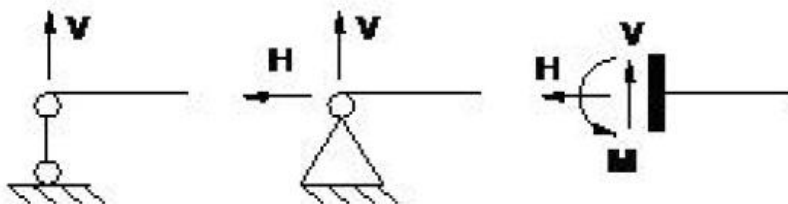
Thanh chịu uốn được gọi là *dầm*.

6.1.2. Gối tựa và phản lực gối tựa

Dầm tựa trên các bộ phận đỡ, những bộ phận này được gọi là *gối tựa* hay *liên kết*.

Có ba loại gối tựa thường gặp là: bản lề di động, bản lề cố định và ngàm.

Hình 6.2 biểu thị sơ đồ tính toán và phản lực của ba loại liên kết trên. Để xác định các phản lực gối tựa ta dùng các phương trình cân bằng tĩnh học trong cơ học lý thuyết.



Hình 6.2

Nếu số phương trình cân bằng tĩnh học bằng số phản lực cần tìm thì ta hoàn toàn xác định được các phản lực của dầm. Đó là loại *dầm tĩnh định*. Nếu dầm có số

phản lực nhiều hơn số phương trình cân bằng tĩnh học, ta có *dầm siêu tĩnh*. Chúng ta sẽ nghiên cứu chủ yếu loại dầm tĩnh định.

6.2. NỘI LỰC TRONG DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

6.2.1. Khái niệm

Sau khi xác định được phản lực thì toàn bộ ngoại lực tác dụng lên dầm đã được xác định. Ta sẽ tính nội lực của dầm.

Giả sử có một dầm mặt cắt có trục đối xứng chịu tác dụng của một lực thẳng đứng P (hình 6.3), trị số của lực và kích thước của dầm cho trên hình vẽ ($P = 4 \text{ kN}$). Ta xác định nội lực tại một mặt cắt bất kỳ của dầm.

Trước hết ta phải xác định các phản lực ở các gối tựa A và B . Vì các ngoại lực, bao gồm tải trọng P và các phản lực liên kết V_A , V_B và H_B , là một hệ lực cân bằng, nên ta có:

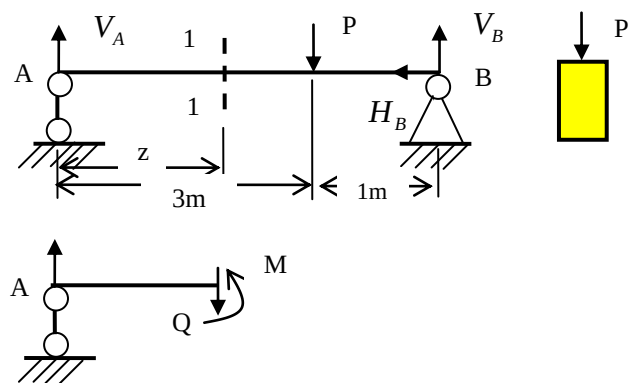
$$\Sigma M_A = V_B \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$$

$$V_B = 3 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = -V_A \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0$$

$$V_A = 1 \text{ kN}$$

Phương trình $\Sigma Z = 0$ cho ta thấy phản lực nằm ngang H_B tại gối B bằng không: $H_B = 0$. Từ đây về sau ta nhớ rằng phản lực dọc (nằm ngang) của dầm chịu uốn luôn luôn bằng không.



Hình 6.3

Để tính nội lực trong dầm ta dùng phương pháp mặt cắt.

Tưởng tượng cắt dầm làm hai phần theo mặt cắt 1-1, cách gối A một đoạn bằng z . Tách riêng một phần dầm để xét, phần trái chẳng hạn. Để cho phần dầm tách ra vẫn cân bằng như khi dầm còn nguyên vẹn thì phải đặt vào mặt cắt 1-1 những nội lực. Các nội lực này được phân bố trên toàn bộ mặt cắt. Quy luật phân bố của chúng như thế nào chúng ta sẽ nghiên cứu ở phần sau. Nhưng nếu thu toàn bộ nội lực về

trọng tâm của mặt cắt ta sẽ được một lực Q và một mômen M ; Q gọi là *lực cắt* và tính bằng *niuton* (N), M gọi là *mômen uốn* và tính bằng *niuton mét* (Nm) (hình 6.3).

Vì phần dầm tách ra vẫn cân bằng nên các ngoại lực của phần dầm đó cân bằng với lực cắt Q và mômen uốn M . Do đó ta có:

$$Q = V_A = 1 \text{ kN}$$

$$M = V_A \cdot z = 1 \cdot z \text{ kNm}$$

Như vậy trị số của lực cắt Q bằng trị số hình chiếu của ngoại lực tác dụng về phía trái mặt cắt lên mặt cắt đó, trị số của mômen uốn M bằng trị số mômen của ngoại lực tác dụng về phía trái mặt cắt đối với trọng tâm của mặt cắt đó.

Như đã biết ở phần trước, nội lực trên cùng một mặt cắt của hai phần dầm (nằm bên trái và bên phải của mặt cắt) thì bằng nhau về trị số nhưng về hướng thì ngược nhau. Do đó trên mặt cắt 1-1 của phần dầm phía phải và của phần dầm phía trái, các nội lực Q và M bằng nhau về trị số nhưng ngược nhau về hướng.

Nếu trên phần dầm đang xét có nhiều ngoại lực tác dụng thì lực cắt Q , mômen uốn M tại mặt cắt nào đó bằng tổng đại số lực cắt Q , mômen uốn M tại mặt cắt đó do từng ngoại lực tác dụng trên phần dầm đang xét gây ra.

6.2.2. Xác định nội lực tại mặt cắt bất kỳ

Từ các nội dung diễn giải trong mục trên, người ta đề ra quy tắc chung để xác định lực cắt Q và mômen uốn M trên mặt cắt bất kỳ của dầm chịu uốn phẳng như sau:

6.2.2.1. Quy tắc xác định trị số Q_i , M_i

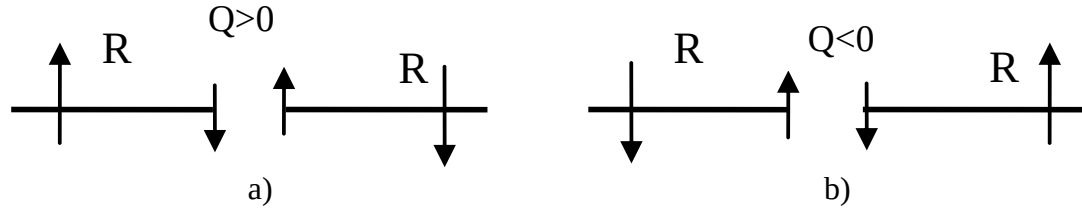
- Lực cắt Q về trị số bằng tổng đại số hình chiếu các ngoại lực ở về một phía của mặt cắt lên mặt cắt đó.

- Mômen uốn M về trị số bằng tổng đại số mômen của các ngoại lực ở về một phía của mặt cắt đối với trọng tâm mặt cắt đó.

6.2.2.2. Quy tắc xác định dấu Q_i , M_i

Nếu muốn cho lực cắt Q , mômen uốn M có một dấu duy nhất mặc dù ta xét phần trái hay phần phải của dầm thì cần theo các quy ước sau:

- Lực cắt Q sẽ có dấu dương tại một mặt cắt nào đó, nếu ngoại lực tác dụng lên một phần của dầm có khuynh hướng làm cho phần đó quay theo chiều kim đồng hồ



Hình 6.4

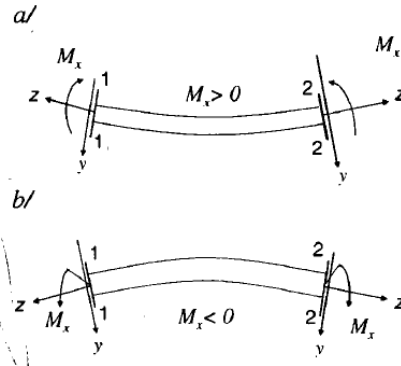
quanh trọng tâm mặt cắt đang xét (hình 6.4a). Ngược lại, Q có dấu âm (hình 6-4b).

- Mômen uốn M sẽ có dấu dương tại một mặt cắt nào đó, nếu ngoại lực ở về một phía của mặt cắt có khuynh hướng làm cho *thờ phía dưới của dầm bị dãn* lúc đó xem như mặt cắt đang xét bị ngàm lại (hình 6.5a). Ngược lại, M có dấu âm (hình 6.5b)

Tổng hợp các trường hợp ở hình 6.4a và 6.5a ta được trường hợp nội lực mang dấu dương trên mặt cắt của dầm chịu uốn ngang phẳng. Ngược lại, các trường hợp ở hình 6.4b và 6.5b ta được trường hợp nội lực mang dấu âm.

6.2.2.3. Ví dụ áp dụng

Các trường hợp trên hình vẽ 6.4 và 6.5 chính là các ví dụ về quy ước dấu của nội lực Q và M . Trong các ví dụ dưới đây khi xét nội lực của các bài toán cụ thể, chúng ta sẽ trở lại áp dụng quy ước này nhiều lần.



Hình 6.5

6.3. BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

Thường trên những mặt cắt khác nhau của dầm, mômen uốn M và lực cắt Q có dấu và trị số khác nhau. Điều đó có nghĩa là M và Q biến đổi theo vị trí của mặt cắt trên trục dầm. Gọi z là hoành độ của các mặt cắt thì M và Q là những hàm số biến thiên theo z , ký hiệu là $Q(z)$ và $M(z)$

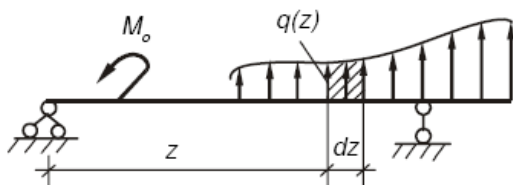
Đồ thị biểu diễn sự thay đổi của Q và M dọc theo trục dầm gọi là *biểu đồ nội lực* Q, M .

Vẽ biểu đồ Q, M là một bước quan trọng trong quá trình tính toán dầm chịu uốn phẳng, vì qua biểu đồ đó ta có thể dễ dàng xác định được trị số lực cắt và mômen uốn tại những *mặt cắt nguy hiểm*. Thông thường những mặt cắt có trị số lực cắt lớn nhất $Q_{\max}$ và mặt cắt có trị số mômen uốn lớn nhất $M_{\max}$ là những mặt cắt nguy hiểm nhất.

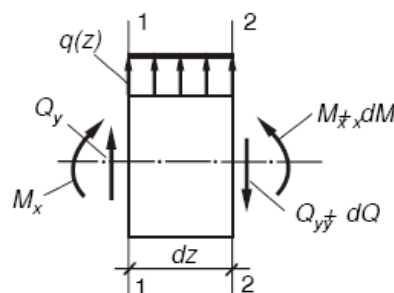
6.3.1. Định lý Giu-rap-xki

Trong một dầm chịu uốn, giữa lực cắt Q , mômen uốn M và cường độ q của tải trọng phân bố có một mối liên hệ toán học quan trọng. Ta sẽ nghiên cứu mối liên hệ đó trong mục này.

Cho một dầm đặt trên hai gối tựa A và B, chịu tải trọng bất kỳ như hình 6.6



Hình 6.6



Hình 6.7

Ta quy ước rằng cường độ lực phân bố $q(z)$ sẽ có dấu dương, nếu nó hướng từ dưới lên trên và có dấu âm trong trường hợp ngược lại. Trên hình 6.6, giả thiết $q(z)$ hướng lên.

Trong đoạn dầm chịu lực phân bố, xét hai mặt cắt bất kỳ 1-1 và 2-2 cách gối A một đoạn z và $z + dz$. Ta tách đoạn dz ra khỏi dầm (hình 6.7). Trên mặt cắt 1-1 có các nội lực Q , M và trên mặt cắt 2-2 có các nội lực $Q + dQ$ và $M + dM$. Vì đoạn dz rất ngắn, nên có thể xem $q(z)$ phân bố đều trên dz và có hợp lực bằng $q(z).dz$. Gọi trục y là trục thẳng đứng. Viết các phương trình cân bằng cho đoạn thanh này, ta được:

$$\sum Y = Q - (Q + dQ) + q(z).dz = 0$$

$$\sum M_o = - M + (M + dM) - Q \frac{dz}{2} - (Q + dQ) \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

Từ phương trình thứ nhất ta rút được: $\frac{dQ}{dz} = q(z)$ (6-1)

Từ phương trình thứ hai, sau khi bỏ qua vô cùng bé bậc hai $dQ \cdot \frac{dz}{2}$, ta được:

$$\frac{dM}{dz} = Q \quad (6-2)$$

Từ (6-1) và (6-2), ta suy ra được:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q(z) \quad (6-3)$$

Các công thức (6-1), (6-2) và (6-3) có ý nghĩa rất quan trọng. Đó là các công thức biểu thị định lý *Giu-rap-xki*:

- Đạo hàm cấp một đối với z của lực cắt Q tại một mặt cắt nào đó thì bằng cường độ tải trọng phân bố $q(z)$ tại mặt cắt đó.

- Đạo hàm cấp một đối với z của mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó thì bằng lực cắt Q tại mặt cắt đó.

- Đạo hàm cấp hai đối với z của mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó thì bằng cường độ tải trọng phân bố $q(z)$ tại mặt cắt đó.

Các liên hệ trên đây giữ một vai trò rất quan trọng trong việc vẽ hoặc kiểm tra các biểu đồ Q và M .

Thực vậy, dựa vào các liên hệ trên có thể rút ra một số quy luật của biểu đồ Q và M sẽ trình bày ở phần dưới.

6.3.2. Các phương pháp vẽ biểu đồ Q và M

6.3.2.1. Phương pháp mặt cắt thuận túy

1. Các bước vẽ biểu đồ Q, M

Khi vẽ biểu đồ Q, M của một dầm ta cần theo các bước sau đây:

a) Xác định các phản lực:

b) Chia dầm ra làm nhiều đoạn, trong mỗi đoạn phải đảm bảo sao cho *nội lực không thay đổi đột ngột*. Muốn thế ta phải dựa vào các mặt cắt có đặt lực hay mômen tập trung, hoặc có sự thay đổi đột ngột của lực phân bố, để phân đoạn.

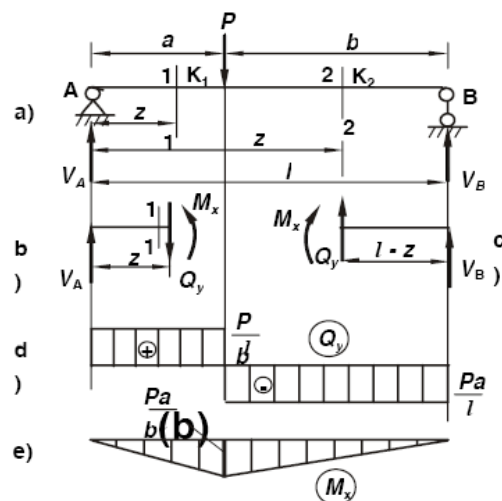
Sau đó, lập biểu thức giải tích của Q , M cho một *mặt cắt bất kỳ* trong từng đoạn.

c) Vẽ biểu đồ Q và M . Đặt trục hoành song song với trục của dầm. Trên trục tung, vuông góc với trục hoành, đặt các giá trị của Q hoặc M theo tỷ lệ xích nhất định.

Dùng các biểu thức của Q và M để vẽ biểu đồ của chúng. Ta quy ước rằng:

- Các tung độ dương của biểu đồ Q đặt ở phía trên trục hoành, tung độ âm đặt ở phía dưới.

- Các tung độ dương của biểu đồ M đặt ở phía dưới trục hoành, các tung độ âm đặt ở phía trên. Như vậy cũng có nghĩa là tung độ của biểu đồ M luôn luôn đặt về phía thớ bị dãn của dầm.



Hình 6.8

Ví dụ 6.1

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm tựa trên hai gối bản lề A và B, chịu tải trọng P như hình 6.8a.

Bài giải

a) *Xác định phản lực*: Ngoại lực tác dụng gồm tải trọng P đã biết và các phản lực V_A, V_B chưa biết (phản lực $H_A = 0$). Do đó trước hết phải xác định phản lực. Ta giả thiết hướng của các phản lực như hình 6.8a. Viết các phương trình cân bằng tĩnh học ta được:

$$\sum M_A = V_B \cdot l - P \cdot a = 0 ; \text{ Do đó: } V_B = \frac{P \cdot a}{l} ;$$

$$\sum M_B = P \cdot b - V_A \cdot l = 0 ; \text{ Do đó: } V_A = \frac{P \cdot b}{l} ;$$

b) *Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M* : Căn cứ theo ngoại lực tác dụng, ta phân dầm này làm hai đoạn AC và CB (C là điểm đặt của lực P).

1- Biểu thức nội lực trong đoạn AC:

Để lập biểu thức giải tích của Q và M tại một mặt cắt bất kỳ trong đoạn AC , ta cắt dầm bằng mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z (hình 6.8b). Ta xét phần dầm nằm phía bên trái của mặt cắt. Với điều kiện: $0 \leq z \leq a$:

- Lực cắt Q bằng:

$$Q(z) = V_A = P \frac{b}{l} \quad (6-4)$$

Ứng dụng quy tắc xác định dấu Q_i ở trên đã học, $Q(z)$ có dấu dương vì ngoại lực V_A làm cho phần dầm đang xét quay theo chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt đang xét.

- Mômen uốn M tại mặt cắt 1-1 bằng :

$$M(z) = V_A \cdot z = P \frac{b}{l} z \quad (6-5)$$

Ứng dụng quy tắc xác định dấu mômen uốn, $M(z)$ có dấu dương vì V_A làm cho thớ phía dưới của dầm bị dãn.

Khi $z > a$, tức là khi mặt cắt đã vượt quá điểm C thì ngoại lực phía trái không phải chỉ có một phản lực V_A mà sẽ còn có lực P , do đó biểu thức (6-4) và (6-5) không dùng được nữa và tại điểm C nội lực trong dầm đã đột ngột thay đổi. Chính vì lý do đó mà ta phải phân dầm thành hai đoạn lấy điểm C làm ranh giới.

2- Biểu thức nội lực trong đoạn CB :

Để xác định nội lực của mặt cắt bất kỳ trong đoạn CB ta dùng mặt cắt 2-2, cách gối A một đoạn z , nhưng phải thỏa mãn điều kiện: $a \leq z \leq l$. Xét phần bên phải của mặt (hình 6.8c) ta được:

$$Q(z) = -V_B = -P \frac{a}{l} \quad (6-6)$$

Lực cắt $Q(z)$ có dấu âm, vì ngoại lực V_B muốn làm cho phần dầm đang xét quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt đang xét.

$$M(z) = V_B(l-z) = P \frac{a}{l} (l-z) \quad (6-7)$$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

1- Khi mặt cắt 1-1 thay đổi vị trí từ A đến C , nghĩa là $0 \leq z \leq a$, thì:

- Theo (6-4), lực cắt $Q(z)$ luôn luôn bằng hằng số. Do đó biểu đồ của $Q(z)$ là một đường thẳng song song với trục z (hình 6-8d) có tung độ bằng $P \frac{b}{l}$

Lực cắt Q có dấu dương nên các tung độ đặt ở phía trên trục hoành.

- Theo (6-5), mômen uốn $M(z)$ là một hàm bậc nhất của z . Do đó đường biểu diễn $M(z)$ là đoạn thẳng xiên xác định được bằng hai điểm:

Điểm nhỏ nhất với $z = 0, M = 0$; điểm lớn nhất với $z = a, M = P \frac{ab}{l}$

Nhớ rằng theo quy ước đã nêu ở trên, tung độ dương của M đặt phía dưới trục hoành (hình 6.8e)

2.- Trong đoạn CB, theo (6-6) lực cắt Q là một hằng số nên đường biểu diễn là một đường song song với trục hoành. Vì Q có dấu âm nên các tung độ của biểu đồ đặt ở phía dưới (hình 6-8d).

Biểu đồ M là một đường thẳng xiên vì $M(z)$ là một hàm số bậc nhất của z , theo biểu thức (6-7). Đường thẳng này được xác định nhờ hai điểm (hình 6.8e):

Điểm nhỏ nhất với $z = 0, M = 0$

Điểm lớn nhất với $z = b, M = P \frac{ab}{l}$

Khi vẽ xong các biểu đồ ta kẻ những gạch theo phương vuông góc với trục dầm và đặt dấu vào trong các biểu đồ đó.

Ta thấy mặt cắt có lực cắt lớn nhất nằm trong đoạn AC:

$$Q_{\max} = \frac{P.b}{l} \quad (\text{nếu } b > a)$$

Và mặt cắt có mômen lớn nhất là tại điểm đặt lực P :

$$M_{\max} = \frac{P.ab}{l}$$

Chú ý: * Tại các mặt cắt có lực tập trung V_A, V_B, P biểu đồ Q có các bước nhảy, trị tuyệt đối của các bước nhảy này bằng trị số các lực V_A, V_B, P và tại các mặt cắt đó biểu đồ M gây khúc.

* Nếu lực tập trung P đặt tại điểm giữa của dầm ($a = b = \frac{l}{2}$) thì:

$$Q_{\max} = \frac{P}{2} \quad (6-8a)$$

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \quad (6-8b)$$

Trường hợp này rất hay gặp, nên các trị số trên đáng ghi nhớ.

Ví dụ 6.2

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm chịu tải trọng phân bố đều trên suốt chiều dài với cường độ q (hình 6-9a)

Bài giải

a) *Xác định phản lực*: Trước hết ta phải xác định phản lực gối tựa V_A và V_B tại A và B

Coi hợp lực của lực phân bố $R = ql$ đặt tại chính giữa dầm, lập các phương trình cân bằng ta có:

$$\sum M_A = V_B l - ql \frac{l}{2} = 0, \text{ suy ra: } V_B = \frac{ql}{2}$$

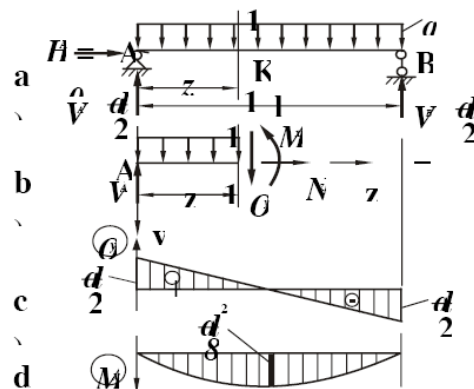
$$\sum M_B = ql \frac{l}{2} - V_A l = 0. \text{ suy ra: } V_A = \frac{ql}{2}$$

(Cũng có thể dễ dàng nhận thấy rằng vì tải trọng đối xứng nên phản lực $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$)

b) *Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M*

Trong suốt chiều dài của dầm, từ A đến B ngoại lực không thay đổi đột ngột, do đó dầm chỉ gồm một đoạn.

Để xác định nội lực, ta cắt dầm bằng mặt cắt 1-1 cách gối tựa A một đoạn z . Phần dầm phía trái mặt cắt chịu tác dụng của các ngoại lực V_A và lực phân bố đều trên chiều dài z có hợp lực qz (hình 6-9b), do đó ta có:



Hình 6.9

$$Q(z) = V_A - qz = q \frac{l}{2} - qz$$

$$M(z) = V_A z - qz \frac{z}{2} = q \frac{l}{2} z - q \frac{z^2}{2}$$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

- Lực cắt Q là một hàm bậc nhất nên đường biểu diễn của nó là một đường thẳng (hình 6-9c), xác định bởi hai điểm: điểm đầu mút trái với $z = 0$, $Q = \frac{ql}{2}$; điểm đầu mút phải với $z = l$, $Q = -\frac{ql}{2}$.

- Mômen uốn M là một hàm bậc hai nên biểu đồ của M là một parabol bậc hai (hình 6-9d). Để vẽ biểu đồ M ta xác định một số điểm như sau:

$$\text{điểm mút trái với } z = 0, \quad M = 0;$$

$$\text{điểm gần mút trái với } z = \frac{l}{4} \quad M = \frac{3}{32}ql^2$$

$$\text{điểm giữa dầm với } z = \frac{l}{2} \quad M = \frac{ql^2}{8}$$

$$\text{điểm gần mút cuối với } z = \frac{3l}{4} \quad M = \frac{3}{32}ql^2;$$

$$\text{điểm mút cuối với } z = l \quad M = 0$$

Căn cứ vào biểu đồ Q, M trên hình 6-9 ta thấy tại mặt cắt chính giữa dầm có:

$$Q = 0; \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \quad (6-9)$$

Mặt cắt tại gối tựa A và B có:

$$|Q_{\max}| = \frac{ql}{2} \quad (6-10)$$

Ví dụ 6.3

Vẽ biểu đồ lực cắt Q và mômen uốn M của dầm dài l chịu tác dụng của mômen tập trung $M_o = m$ như hình 6-10.

Bài giải

a) *Xác định phản lực*: Xác định phản lực thẳng đứng V_A , V_B bằng cách lập các phương trình cân bằng:

$$\sum M_B = V_A l - m = 0, \text{ suy ra: } V_A = \frac{m}{l}$$

$$\sum M_A = V_B l - m = 0, \text{ suy ra: } V_B = \frac{m}{l}$$

b) *Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M*

Ta chia dầm ra làm 2 đoạn AC và CB, điểm C là vị trí phân đoạn vì tại đó có mômen tập trung m .

* *Biểu thức nội lực trong đoạn AC*:

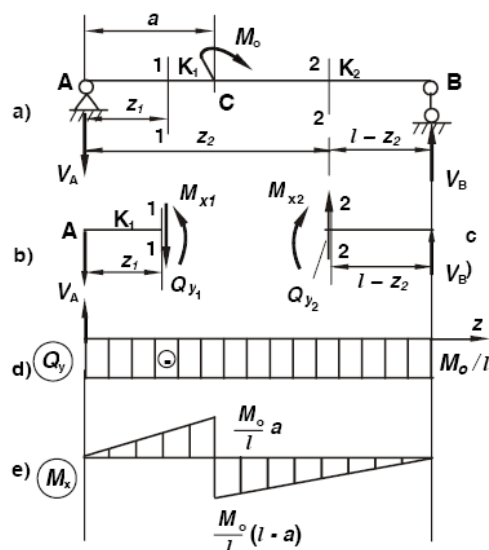
Tính nội lực tại mặt cắt 1-1 cách đầu trái dầm một đoạn z_1 bất kỳ (hình 6-10b), ta được :

$$\left. \begin{aligned} Q(z_1) &= -V_A = -\frac{m}{l} \\ M(z_1) &= -V_A z_1 = -\frac{m}{l} z \end{aligned} \right\} (0 \leq z_1 \leq a)$$

$$\text{Khi } z_1 = 0 \rightarrow Q = -\frac{m}{l} \text{ và } M = 0$$

$$\text{Khi } z_1 = a, \rightarrow Q = -\frac{m}{l} \text{ và } M = -\frac{ma}{l}$$

* *Biểu thức nội lực trong đoạn CB*:



Hình 6.10

Nội lực trên mặt cắt 2-2, (hình 6.10c) cách đầu trái A của dầm một đoạn z_2 là :

$$\left. \begin{aligned} Q(z_2) &= -V_B = -\frac{m}{l} \\ M(z_2) &= V_B(l - z_2) = \frac{m}{l}(l - z_2) \end{aligned} \right\} \quad (a \leq z_2 \leq l)$$

Khi $z_2 = a$, $Q = -\frac{m}{l}$ và $M = \frac{m}{l}(l - a)$

Khi $z_2 = l$, $Q = -\frac{m}{l}$ và $M = 0$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

Trong đoạn AC và CB, biểu đồ Q là đường thẳng nằm ngang, còn biểu đồ M là đường thẳng xiên như hình 6.10d và 6.10e.

Từ các biểu đồ ta thấy :

$$|Q_{\max}| = \frac{m}{l} \quad (6-11)$$

$$|M_{\max}| = \frac{m}{l}(l - a) \quad \text{nếu } (l - a) > a \quad (6-12)$$

Chú ý: Ở mặt cắt có mômen tập trung tác dụng thì biểu đồ M có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của mômen tập trung. Nhưng tại mặt cắt có mômen tập trung đó, biểu đồ lực cắt Q không có gì thay đổi.

Ví dụ 6.4

Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu lực phân bố như hình 6-11a.

Bài giải

a) *Xác định phản lực:* Trước hết, để xác định phản lực V_A và V_B ta có thể thay thế lực phân bố tam giác bằng hợp lực của chúng $R = q_0 \frac{l}{2}$, đi qua trọng tâm C của tam giác. Viết các phương trình cân bằng, ta được:

$$\sum M_A = V_B l - q_0 \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} = 0$$

$$\sum M_B = q_0 \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} - V_A l = 0$$

Từ đó, rút ra:

$$V_B = \frac{q_0 l}{3}; V_A = \frac{q_0 l}{6}$$

b) Phân đoạn và thiết lập các biểu thức của Q và M

Dầm này chỉ có một đoạn nên ta dùng một mặt cắt là đủ xác định được các biểu thức của nội lực Q và M . Xét mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z . Phần dầm phía trái chịu tác dụng của phản lực V_A và của hợp lực của lực phân bố, có trị số bằng diện tích tam giác A11 (hình 6.11b) và đi qua trọng tâm tam giác đó. Do đó nội lực tại mặt cắt 1-1 bằng:

$$Q(z) = V_A - q(z) \frac{z}{2}$$

$$M(z) = V_A z - q(z) \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{3}$$

Cường độ lực phân bố $q(z)$ biến thiên bậc nhất theo z , ta có thể tính được $q(z)$ bằng tam giác đồng dạng: $\frac{q(z)}{q_0} = \frac{z}{l}$; Từ đó ta được: $q(z) = q_0 \frac{z}{l}$

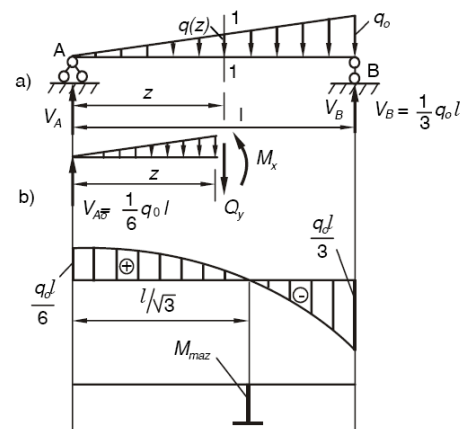
Thay trị số của $q(z)$ vào $Q(z)$ và $M(z)$, ta được:

$$Q(z) = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} z^2 \quad (0 \leq z \leq l)$$

$$M(z) = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0}{6l} z^3$$

c) Vẽ biểu đồ nội lực Q và M

Vẽ đồ thị biểu diễn hàm bậc hai của $Q(z)$ và hàm bậc ba của $M(z)$ ở trên, ta được các biểu đồ nội lực của dầm (hình 6-11 c,d). Mômen uốn M sẽ đạt cực đại khi đạo hàm cấp một của $M(z)$ triệt tiêu.



Hình 6.11

Bảng 6.1

z	0	l/2	$\frac{l\sqrt{3}}{3}$	l
Q (z)	$\frac{q_0 l}{6}$	$\frac{q_0 l}{24}$	0	$-\frac{q_0 l}{3}$
M (z)	0	$0,0625q_0 l^2$	$0,0641q_0 l^2$	0

Vậy ta có thể tính được hoành độ của mặt cắt có $M_{\max}$, như sau:

$$\frac{dM}{dz} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{qz^2}{2l} = 0, \text{ rút ra: } z = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Như vậy: } M_{\max} = M \Big|_{z = \frac{l\sqrt{3}}{3}} &= 0,0641 q_0 l^2 \end{aligned} \quad (6-13)$$

Tại mặt cắt $z = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, lực cắt $Q = 0$. Ta thấy tại mặt cắt giữa dầm: $z = \frac{l}{2}$, mômen uốn M bằng:

$$\begin{aligned} M \Big|_{z = \frac{l}{2}} &= \frac{q_0 l^2}{16} = 0,0625 q_0 l^2 \end{aligned} \quad (6-14)$$

Trị số mômen uốn này chỉ kém trị số cực đại 2,4%. Do đó, để tiện cho tính toán, người ta có thể coi mặt cắt giữa dầm có mômen uốn lớn nhất và bằng $0,0641 \cdot q_0 l^2$.

Ví dụ 6.5

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm công – xôn chịu tải trọng tập trung ở cuối dầm như hình 6.12.

Bài giải

Dùng mặt cắt 1-1, cách gốc ngàm A một đoạn z ($0 \leq z \leq l$). Xét cân bằng phần dầm phía phải mặt cắt 1-1, biểu thức giải tích của lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt 1-1 là:

$$\sum Z = 0 \text{ suy ra: } N = 0$$

$$\sum Y = 0, \text{ suy ra: } Q - P = 0, \rightarrow Q = P$$

$$\sum M = 0 \rightarrow -M - P(l - z) = 0 \rightarrow M = -P(l - z)$$

Cho z biến thiên từ 0 đến l , ta sẽ được biểu đồ nội lực như trên hình 6.12

Tại mặt cắt ở ngàm có nội lực lớn nhất:

$$Q_{\max} = P$$

$$M_{\max} = -P.l \quad (6-15)$$

Từ bài toán này ta rút ra nhận xét là khi vẽ biểu đồ Q và M của dầm công-xôn thì không cần xác định phản lực và ta chỉ xét phần dầm có nút tự do.

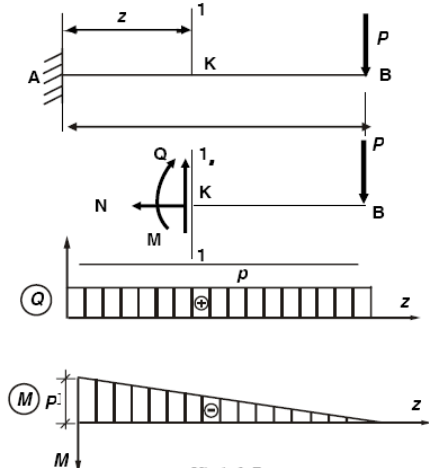
6.3.2.2. Một số quy luật của biểu đồ Q và M

Dựa vào Định lý Giu-rap-xki và các cách vẽ biểu đồ Q , M nêu trên, có thể rút ra một số quy luật của biểu đồ Q và M như sau:

a) Nếu trên một đoạn dầm không có tải trọng phân bố ($q=0$) nghĩa là $\frac{dQ}{dz} = 0, \frac{d^2M}{dz^2} = 0$, thì Q sẽ là hằng số và M sẽ là hàm bậc nhất trong đoạn đó. Do đó biểu đồ Q là một đường thẳng song song với trục hoành và biểu đồ M là một đường thẳng xiên.

Trường hợp đặc biệt, nếu $Q = 0$ thì M là hằng số và biểu đồ M là một đường thẳng song song với trục hoành.

b) Nếu trên một đoạn dầm có lực phân bố đều ($q = \text{hằng số}$) thì trong đoạn dầm đó, lực cắt Q là hàm bậc nhất, mômen uốn M là hàm bậc hai. Do đó, biểu đồ Q là một đường thẳng xiên, biểu đồ M là một parabol bậc hai. Trong trường hợp này, tại mặt cắt có $Q = 0$ thì M sẽ qua cực trị. Nếu Q đổi dấu từ dương sang âm, M sẽ qua cực đại và nếu Q đổi từ âm sang dương, M sẽ qua cực tiểu.



Hình 6.12

c) Nếu trên một đoạn dầm có lực phân bố theo luật bậc nhất, thì lực cắt Q là hàm bậc hai và mômen uốn M là hàm bậc ba. Tại mặt cắt có $q = 0$ thì Q qua cực trị và M qua điểm uốn. Tại mặt cắt có $Q = 0$ thì M qua cực trị.

6.3.2.3. Cách vẽ biểu đồ Q và M theo những điểm đặc biệt

Khi vẽ biểu đồ nội lực người ta làm theo các bước như đã nói ở trên, tức là lập biểu thức giải tích của $Q(z)$ và $M(z)$ và căn cứ vào đó mà vẽ biểu đồ. Tuy nhiên, ta có thể dựa vào các nhận xét rút ra ở các ví dụ trong 6.3.2.1 và dựa vào các tính chất đã nói trong 6.3.2.2. để tìm ra phương pháp vẽ biểu đồ Q , M theo những điểm đặc biệt.

Muốn vẽ biểu đồ Q , M theo những điểm đặc biệt ta cần theo các quy tắc chính như sau: vẽ biểu đồ từ mút trái sang mút phải của dầm; đường biểu diễn bao giờ cũng xuất phát từ trục hoành và cuối cùng lại trở về trục hoành.

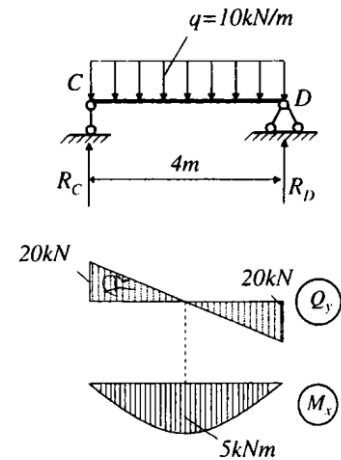
1. Khi vẽ biểu đồ Q :

- Tại mặt cắt có lực tập trung thì biểu đồ Q có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của lực tập trung, hướng bước nhảy trùng với hướng của lực tập trung.

- Tại mặt cắt có mômen tập trung, biểu đồ Q không có sự thay đổi gì.

- Nếu trên đoạn dầm không có lực phân bố ($q = 0$) thì biểu đồ Q là một đường thẳng song song với trục z trong đoạn đó.

- Nếu trên một đoạn dầm có tải trọng phân bố đều ($q = \text{hằng số}$) thì biểu đồ Q là một đường thẳng xiên theo hướng của tải trọng q trong đoạn đó. Trị số của lực cắt Q trong đoạn đó biến đổi, lượng biến đổi của lực cắt Q giữa hai mặt cắt bất kỳ bằng hợp lực của tải trọng phân bố trong đoạn dầm giữa hai mặt cắt đó.



Hình 6.13

Hình 6-13 nêu một ví dụ. Trong đoạn 4 m dầm chịu tải trọng phân bố đều hướng xuống nên biểu đồ Q là một đường xiên hướng xuống (kể từ trái sang phải). Lượng biến đổi của lực cắt Q giữa hai mặt cắt cuối và đầu của đoạn 4 m là:

$$|Q_2 - Q_1| = 4.q = 40 \text{ kN}$$

Lượng biến đổi của lực cắt Q trong đoạn từ $Q = 0$ đến cách mút trái b (m) là :

$$|0 - Q_1| = b.q;$$

$$\text{Do đó: } b = \frac{|Q_1|}{q} \quad (\text{m}) \quad (6-16)$$

2. Khi vẽ biểu đồ M

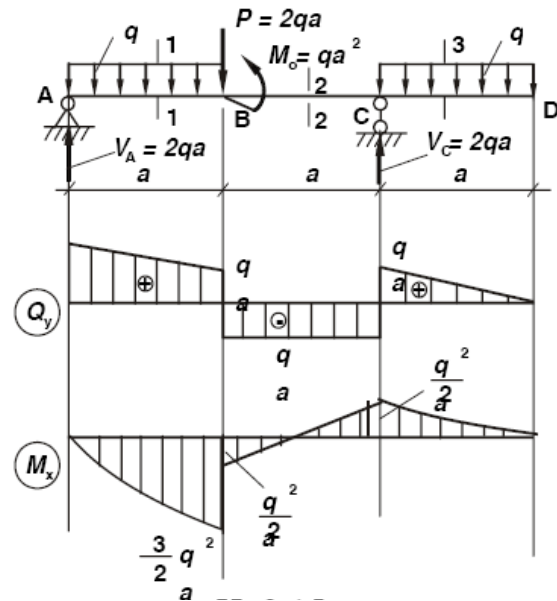
Tính trị số mômen uốn M tại các mặt cắt giới hạn những đoạn dầm mà ta đã phân chia để vẽ biểu đồ nội lực. Riêng vị trí có đặt mômen tập trung thì cần tính mômen uốn M hai mặt cắt bên trái và bên phải vị trí đó. Ngoài ra, ta cần có những chú ý như sau:

- Tại mặt cắt có lực tập trung, biểu đồ M bị gãy khúc.
- Tại mặt cắt có mômen tập trung, biểu đồ M sẽ có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của mômen tập trung đó; hướng của bước nhảy sẽ đi xuống nếu mômen tập trung quay cùng chiều kim đồng hồ và đi lên, nếu ngược lại.
- Trong đoạn dầm không có lực phân bố, biểu đồ M là một đường thẳng nằm ngang (nếu $Q = 0$) hoặc đường thẳng xiên (nếu $Q \neq 0$).

- Trong đoạn dầm có lực phân bố đều ($q = \text{hằng số}$), biểu đồ M là một đường parabol bậc hai. Đường cong này sẽ lồi về phía dưới nếu q hướng từ trên xuống dưới và ngược lại. Điểm cực trị của parabol ứng với điểm mà biểu đồ Q cắt trục hoành, tức là ứng với mặt cắt có $Q = 0$ (hình 6-13) và có vị trí xác định bởi (6-16).

Ví dụ 6.6

Cho một dầm chịu tải trọng như hình 6-14. Biết dầm chịu tải trọng phân bố



Hình 6.14

q , mômen tập trung $M_o = q.a^2$, lực tập trung $P = 2.q.a$. Khoảng cách mỗi đoạn dầm là a . Hãy vẽ biểu đồ lực cắt Q và mômen uốn M theo những điểm đặc biệt.

Bài giải

a) Xác định phản lực

Trước hết ta lập các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định phản lực:

$$\sum M_A = V_C . 2a + M_o - P.a - q.a . \frac{a}{2} - q.a . \frac{5a}{2} = 0$$

Giải ra: $V_C = 2.q.a$

$$\sum M_C = - V_A . 2a + M_o + P.a + q . a . \frac{3a}{2} - q.a . \frac{a}{2} = 0$$

Giải ra: $V_A = 2.q.a$

b) Phân đoạn và vẽ biểu đồ Q và M

Trong trường hợp này, ta phân dầm làm ba đoạn: AB, BC và CD

1. Vẽ biểu đồ Q : Ta hãy bắt đầu vẽ từ mút trái sang mút phải của dầm. Vì tại mút A có phản lực V_A hướng lên trên, nên từ điểm A trên trục hoành ta kẻ một đoạn thẳng AA_1 hướng từ dưới lên trên. Độ lớn đoạn AA_1 biểu thị lực cắt Q tại mặt cắt A và có giá trị bằng $V_A = + 2.q.a$. Trong đoạn AB dầm có tải trọng phân bố đều hướng xuống dưới nên biểu đồ Q là đoạn xiên xuống A_1B_1 . Vì hợp lực của phân bố trong đoạn AB là $q.a$, mà tung độ của điểm A là $2.q.a$, nên tung độ của điểm B sẽ là: $2.q.a - q.a = + q.a$. Đến điểm B có lực tập trung $P = 2.q.a$, chiều đi xuống, nên từ đây vẽ xuống một đoạn có trị số $2.q.a$. Từ B đến C không có lực phân bố hay lực tập trung nên ta vẽ tiếp một đường song song với trục hoành.

Tại C dầm chịu lực áp dụng $V_C = 2.q.a$ hướng lên nên biểu đồ Q có bước nhảy từ dưới lên trên là C_1C_2 và tung độ của C_2 là $2.q.a - q.a = + q.a$. Trong đoạn CD dầm chịu lực phân bố đều q hướng xuống nên biểu đồ Q là đường xiên C_2D hướng xuống. Hợp lực của lực phân bố trong đoạn này là $q.a$, mà tung độ của CB là $+ q.a$ nên tung độ của D bằng không, điểm D sẽ nằm trên trục hoành.

2. Vẽ biểu đồ M (hình 6.14). Trong đoạn AB biểu đồ M phải là đường cong bậc hai, vì trong đoạn đó lực cắt Q là bậc một. Tại mặt cắt A: $M_A = 0$, nên ta có điểm A với tung độ bằng 0 trên biểu đồ M . Tại mặt cắt trái sát điểm B: $M_B^{tr} = V_A.a - q.a . \frac{a}{2} =$

$\frac{3qa^2}{2}$, nên ta có điểm B_2 với tung độ $BB_2 = + \frac{3qa^2}{2}$ đặt về phía dưới trục hoành. Nối liền điểm A và điểm B_2 bởi đường cong bậc hai, ta sẽ được biểu đồ M trong đoạn AB.

Tại điểm B có mômen tập trung $M_0 = qa^2$ quay ngược chiều kim đồng hồ, do đó biểu đồ M có bước nhảy từ dưới lên trên với trị số tuyệt đối là qa^2 . Vậy tại mặt cắt phải sát điểm B, ta phải có: $M_B^{ph} = \frac{qa^2}{2}$ (vì: $M_B^{tr} + [M_B^{ph}] = - \frac{3qa^2}{2}$). Do đó ta có

điểm B_2 với tung độ $BB_3 = \frac{qa^2}{2}$ đặt về phía dưới trục hoành. Trong đoạn BC, ta xét

M_C : $M_C = - \frac{qa^2}{2}$, do đó điểm C có tung độ $\frac{qa^2}{2}$, đặt ở phía trên trục hoành. Biểu đồ M phải là đường thẳng bậc một đi về phía trên, nối hai điểm đặc biệt B_2 và C ta được biểu đồ đoạn BC.

Trong đoạn CD, dầm chịu lực phân bố đều nên biểu đồ M là một đường parabol bậc hai lồi về phía dưới. Tại mặt cắt C không có mômen tập trung nên biểu đồ M tại đó không có bước nhảy. Tại mặt cắt D: $M_D = 0$. Đường parabol C_2D biểu diễn biểu đồ M trong đoạn CD.

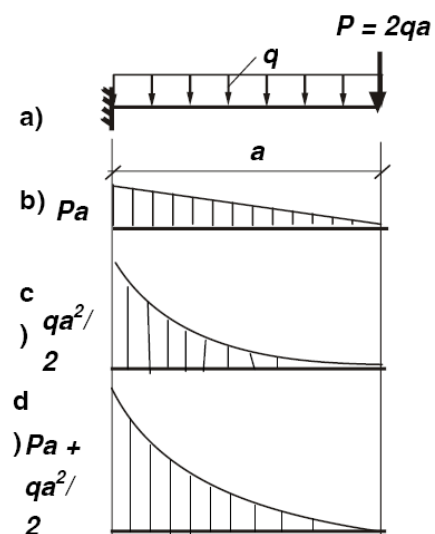
6.3.2.4. Phương pháp cộng tác dụng để vẽ biểu đồ Q, M

Khi dầm chịu tác dụng của nhiều tải trọng, nếu dùng phương pháp như đã xét ở trên ta hoàn toàn vẽ được biểu đồ nội lực của dầm. Nhưng trong trường hợp này, nếu dùng *phương pháp cộng tác dụng* thì việc vẽ biểu đồ có thể sẽ đơn giản hơn. Ta hãy xét một số ví dụ sau đây:

Ví dụ 6.7

Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu tải trọng như hình 6-15a.

Bài giải



Hình 6.15

Ta có thể coi tác dụng của lực phân bố và lực tập trung đối với dầm (hình 6.15a) bằng tổng các tác dụng riêng biệt của lực phân bố (hình 6-15c) và lực tập trung (hình 6-16b) đối với dầm đó.

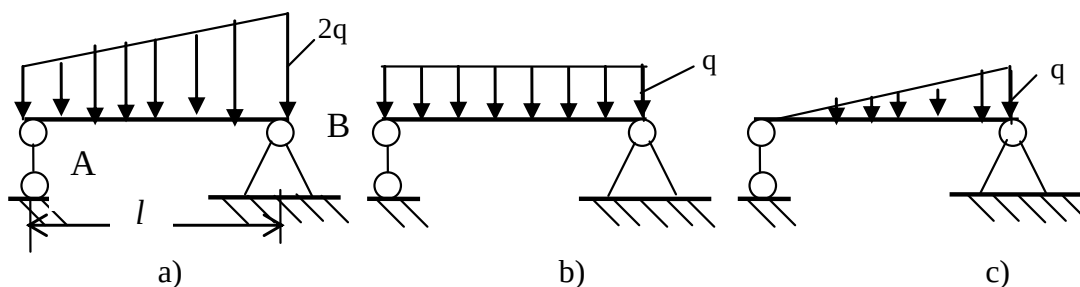
Với dầm chịu lực phân bố đều ta đã vẽ được biểu đồ nội lực ở ví dụ 6.2. Với dầm chịu lực tập trung ta đã vẽ được biểu đồ nội lực ở ví dụ 6.1.

Để có được tung độ của biểu đồ nội lực (Q hoặc M) của dầm ở hình 6.15a, ta cộng đại số các tung độ tương ứng của biểu đồ nội lực của dầm ở hình 6.15b và 6.15c. Đó là nội dung của phép cộng biểu đồ.

Với biểu đồ mômen uốn, cộng biểu đồ ở hình 6.15b với biểu đồ ở hình 6.15c, ta sẽ được biểu đồ mômen uốn M của dầm đã cho (hình 6.15d). Với biểu đồ lực cắt Q ta cũng làm tương tự như vậy

Ví dụ 6.8

Xác định nội lực lớn nhất $M_{\max}$, $Q_{\max}$ trong dầm chịu lực phân bố hình thang (hình 6-16a)



Hình 6.16

Bài giải

Đối với tác dụng của lực phân bố hình thang (hình 6.16a) có thể xem bằng tổng tác dụng của lực phân bố đều (hình 6.16b) với tác dụng của lực phân bố tam giác (hình 6.16c). Với mỗi dầm sau, ta đã vẽ được biểu đồ nội lực ở ví dụ 6.2 và 6.4.

Với dầm chịu lực phân bố đều mặt cắt có lực cắt lớn nhất tại hai đầu dầm:

$$Q_A = Q_B = \frac{ql}{2}$$

Và mặt cắt có mômen uốn lớn nhất tại giữa nhịp

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

Với dầm chịu lực phân bố hình tam giác mặt cắt có lực cắt Q lớn nhất tại gối tựa B

$$Q_B = -\frac{ql}{3}$$

và mặt cắt ở giữa nhịp có thể xem là có mômen uốn lớn nhất:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{16}$$

Do đó, dùng phương pháp cộng tác dụng ta thấy ngay với dầm chịu lực phân bố hình thang nặt cắt có lực cắt lớn nhất tại gối tựa B.

$$|Q|_{\max} = \left| \frac{ql}{3} + \frac{ql}{2} \right| = \frac{5}{6}ql$$

và mặt cắt có mômen uốn lớn nhất tại giữa nhịp:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{16} = \frac{3}{16}ql^2$$

6.4. ỨNG SUẤT PHÁP TRÊN MẶT CẮT NGANG CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

6.4.1. Dầm chịu uốn thuần túy

6.4.1.1. Khái niệm

Chúng ta hãy nghiên cứu một dầm chịu tải trọng như hình 6.17, (phía bên trái). Sau khi vẽ biểu đồ lực cắt $Q(z)$ và mômen uốn $M(z)$ thì thấy giá trị của lực cắt và mômen uốn của một mặt cắt bất kỳ trong đoạn giữa là:

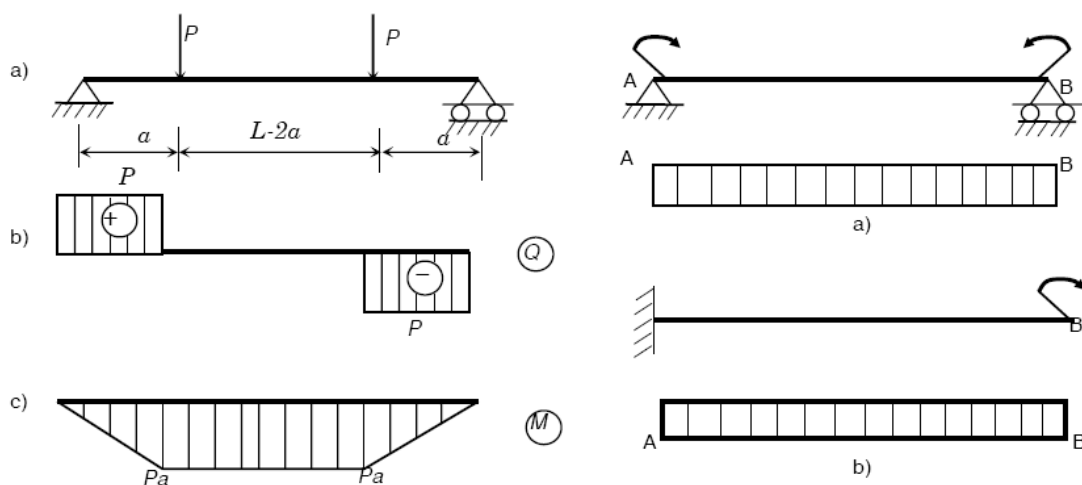
$$Q(z) = 0$$

$$M(z) = Pa = \text{hằng số}$$

Những đoạn dầm nào khi bị uốn mà lực cắt $Q(z) = 0$, mômen uốn $M(z) = \text{hằng số}$ thì người ta nói đoạn dầm đó chịu uốn thuần túy.

Chúng ta có thể lấy các ví dụ khác: một dầm chịu hai mômen tập trung, có cùng trị số nhưng ngược chiều nhau, tác dụng ở mỗi đầu, hay một dầm một đầu ngàm,

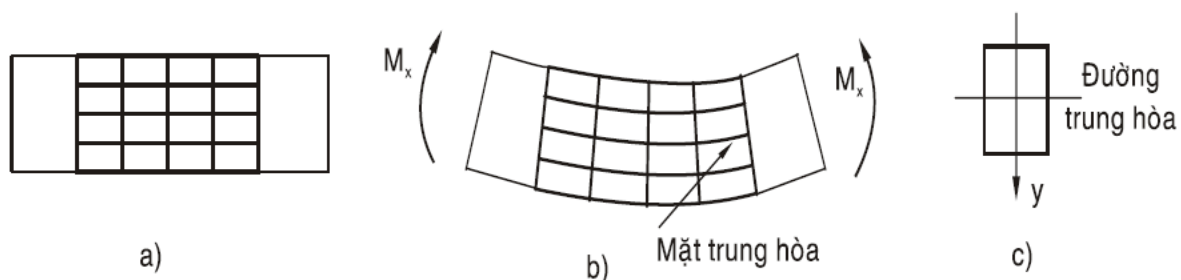
đầu tự do chịu mômen uốn (hình 6.17, bên phải) thì các dầm đó cũng chịu uốn thuần túy.



Hình 6.17

6.4.1.2. Ứng suất pháp

a) *Quan sát biến dạng*: Tương tự như trong các trường hợp kéo (nén) đúng tâm, việc tìm luật phân bố của ứng suất pháp trên mặt cắt của dầm chịu uốn chỉ có thể được giải quyết, nếu ta quan sát biến dạng. Lấy một thanh cao su có mặt cắt chữ nhật. Hai đầu thanh chịu tác dụng của hai mô men có cùng trị số nhưng ngược chiều



Hình 6.18

như hình 6.18.

Để tiện việc quan sát thì ở mặt bên của thanh ta kẻ những đường song song với trục thanh (tượng trưng cho các thớ dọc) và những đường thẳng vuông góc với trục thanh (tượng trưng cho các mặt cắt) tạo thành nhiều hình chữ nhật nhỏ như hình 6.18a.

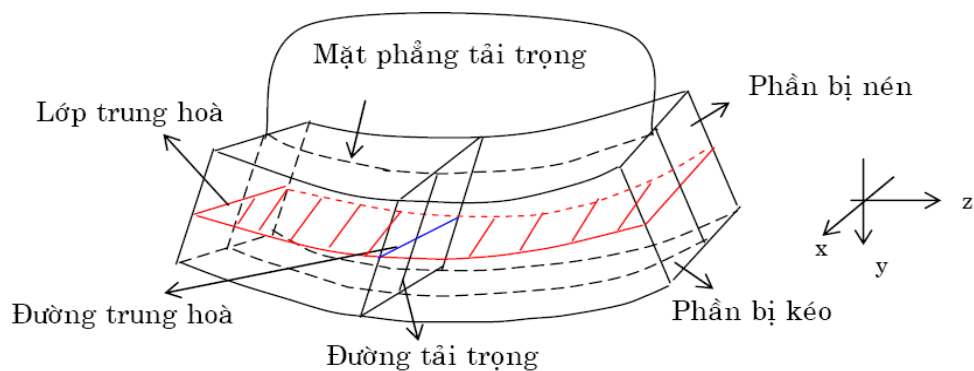
Khi thanh bị uốn thì ta thấy:

1) Dưới tác dụng của mômen uốn, những đường song song với trục dầm bị biến dạng làm thành những cung đồng tâm (hình 6.18b). Từ đó ta thấy khi bị uốn thì có những thớ bị co và những thớ bị giãn. Mô men uốn dương thì những thớ phía trên co lại, những thớ phía dưới giãn ra. Ngược lại, nếu mômen âm thì những thớ phía trên giãn ra còn những thớ phía dưới co lại.

2) Sau khi dầm bị uốn, những đường thẳng trước kia ta kẻ vuông góc với trục thì xoay đi, nhưng vẫn là những đường thẳng và luôn luôn vuông góc với những đường song song với trục đã bị uốn cong, các góc của những hình chữ nhật nhỏ kẻ ở mặt bên vẫn giữ là vuông (hình 6.18b).

Như vậy, nếu coi biến dạng của những đường song song và những đường vuông góc với trục dầm như biến dạng của các thớ dọc và của các mặt cắt thì chúng ta có thể rút ra một số nhận xét sau:

- Khi dầm bị uốn thì do các thớ dọc của nó thay đổi chiều dài một cách liên tục từ mặt lõm đến mặt lồi của dầm nên từ những thớ bị co đi dần đến những thớ bị giãn thế nào cũng phải qua một lớp thớ có chiều dài không thay đổi. Lớp thớ này, được



Hình 6.19

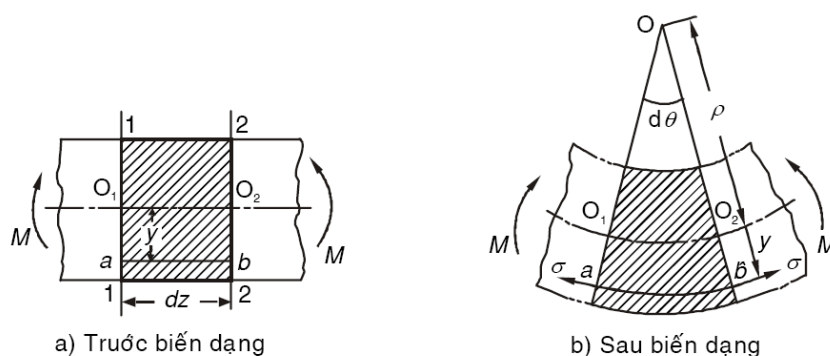
gọi là *lớp trung hoà* (hình 6.19), lớp trung hoà phân cách phần bị kéo và phần bị nén của dầm. Giao tuyến giữa lớp trung hoà và mặt cắt là một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tải trọng, gọi là *trục trung hoà* của mặt cắt. Khi dầm bị uốn mặt cắt của nó sẽ quay quanh trục trung hoà.

- Các mặt cắt của dầm trước và sau khi chịu uốn đều phẳng và thẳng góc với trục dầm, các góc của mỗi hình chữ nhật nhỏ kẻ trên mặt bên của dầm vẫn giữ là vuông góc. Điều đó chứng tỏ trong uốn thuần túy không phát sinh biến dạng trượt trên mặt cắt. Vậy trên các mặt cắt của một dầm chịu uốn thuần túy chỉ có ứng suất pháp chứ không có ứng suất tiếp.

b) Công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt

Chúng ta lấy một dầm bị uốn thuần túy dưới tác dụng của 2 mômen uốn có cùng trị số, ngược chiều quay như hình 6.20.

Khảo sát một phần dầm được giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 cách nhau một khoảng dz .



Hình 6.20

Theo nhận xét về mặt cắt phẳng thì khi bị biến dạng các mặt cắt 1-1 và 2-2 vẫn phẳng nhưng xoay đi và hợp với nhau một góc $d\theta$.

Để ý đến thớ O_1O_2 nằm trên lớp trung hòa không bị biến dạng sau khi chịu uốn:

$O_1O_2 = dz = \rho d\theta$. Xét thớ ab cách lớp trung hòa một khoảng y , ta thấy khi dầm bị uốn cong thì: $ab = (\rho + y)d\theta$. Trong đó, ρ là bán kính cong của O_1O_2 .

Đoạn thẳng O_1O_2 nằm trên lớp trung hòa nên dù bị uốn cong và đã trở thành cung O_1O_2 nhưng chiều dài của nó vẫn không thay đổi. Nghĩa là $O_1O_2 = dz$.

Biến dạng dài tuyệt đối $\Delta (dz)$ của thớ ab là :

$$\Delta (dz) = ab - dz = ab - O_1O_2 = \rho d\theta + yd\theta - \rho d\theta = yd\theta$$

Biến dạng dài tương đối là :

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

Theo định luật Húc ta có:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Trong đó E là môđun đàn hồi khi kéo (hoặc nén) của vật liệu. Nhưng $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$

nên
$$\sigma = \frac{E}{\rho} y \quad (6-17)$$

Công thức (6-17) cho thấy ứng suất pháp σ tỷ lệ thuận với y. Tại trục trung hòa $y = 0$ nên $\sigma = \frac{E}{\rho} \cdot 0 = 0$

Đối với những điểm ở xa trục trung hòa nhất ta có: $\sigma_{\max} = \frac{E}{\rho} y_{\max}$

Hình 6.21 biểu diễn sự phân bố σ trên một mặt cắt chữ nhật của dầm chịu uốn thuần túy.

Tuy nhiên (6-17) mới cho thấy sự phân bố ứng suất σ trên mặt cắt mà chưa tính được trị số σ ở tại mọi điểm, vì chưa biết giá trị của bán kính cong ρ .

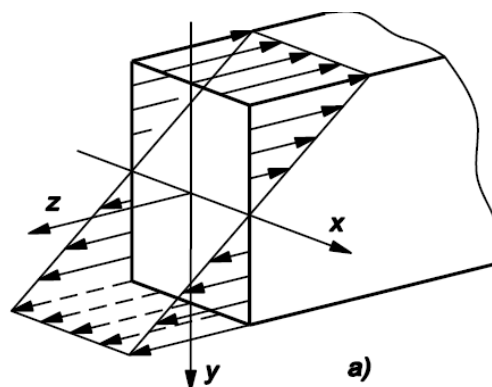
Muốn tính được trị số ứng suất pháp σ tại một điểm bất kỳ ta phải dùng phương pháp mặt cắt.

Tưởng tượng cắt dầm bằng mặt cắt, bỏ phần bên trái đi giữ phần bên phải để nghiên cứu.

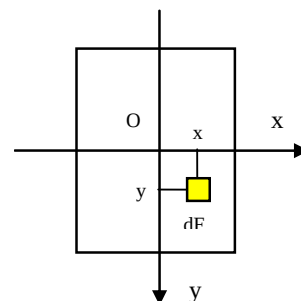
Lấy giao tuyến của mặt phẳng đối xứng với mặt cắt của dầm làm trục y (có chiều hướng xuống), lấy trục trung hòa là trục x (vị trí của trục này xem như chưa biết) và trục z thẳng góc với mặt phẳng xOy.

Ở mọi điểm trên mặt cắt đều có ứng suất pháp tác dụng. Ta lấy một điểm diện tích phân bố dF xung quanh một điểm bất kỳ có khoảng cách đến hai trục là x, y.

Gọi ứng suất ở điểm ấy là σ và xem ứng suất đó phân bố đều trên dF .



Hình 6.21



Hình 6.22

Ta có nội lực sinh ra trên dF là : $dN = \sigma.dF$

mà $\sigma = \frac{E}{\rho}y$ nên $dN = \frac{E}{\rho}y.dF$. Vậy nội lực sinh ra trên toàn bộ mặt cắt là:

$$N = \int_F \frac{E}{\rho}y.dF \quad . \quad \text{Vì } \frac{E}{\rho} \text{ là hằng số nên: } N = \frac{E}{\rho} \int_F y.dF$$

$\int_F y.dF$ là mômen tĩnh của mặt cắt đối với trục trung hòa x , ký hiệu là S_x .

$$\text{Vậy : } N = \frac{E}{\rho}S_x$$

Từ điều kiện cân bằng của phần dầm đang xét ta có:

$$\sum Z = 0, \text{ hay } N = 0 \quad . \quad \text{Nghĩa là: } \frac{E}{\rho}S_x = 0. \quad \text{Ta thấy } \frac{E}{\rho} \neq 0 \text{ nên } S_x = 0$$

$S_x = 0$ biểu thị mômen tĩnh của mặt cắt đối với trục trung hòa x bằng không.
 Vậy, *trục trung hòa đi qua trọng tâm của mặt cắt.*

Trên các mặt cắt của dầm chịu uốn thuần túy chỉ có mômen M tác dụng, nên nội lực trên mặt cắt cũng tạo thành một mômen để chống lại

Nội lực trên phần tử dF gây nên một mômen đối với trục x là:

$$dM_x = y.dN = \frac{E}{\rho}y^2.dF$$

Vậy toàn bộ nội lực trên mặt cắt gây nên một mômen đối với trục x là:

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho}y^2.dF \quad . \quad \text{Hay: } M_x = \frac{E}{\rho} \int_F y^2.dF$$

$\int_F y^2.dF$ là mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung hòa x , ký hiệu là J_x , nên:

$$M_x = \frac{E}{\rho}J_x$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (6-18)$$

ρ là bán kính cong, nên $\frac{1}{\rho}$ gọi là độ cong (độ cong của lớp trung hòa, cũng là độ cong của trục dầm).

$M_{(z)}$ là mômen uốn biến thiên theo hoành độ z và theo hình 6.21 thì $M_{(z)}$ quay quanh trục x nên $M_{(z)}$ chính là M_x .

Từ (6-18) ta thấy độ cong của dầm chịu uốn thuần túy tỷ lệ thuận với mômen uốn và tỷ lệ nghịch với tích số EJ_x .

Nếu EJ_x càng lớn thì độ cong càng nhỏ nên người ta gọi EJ_x là độ cứng của dầm khi uốn.

$$\text{Thay giá trị của } \frac{1}{\rho} \text{ ở (6-18) vào (6-17) ta được: } \sigma = \frac{M_x}{J_x} y$$

Vì khi dầm chịu uốn thuần túy thì những điểm bất kỳ trên mặt cắt có thể nằm trong miền chịu kéo hoặc trong miền chịu nén, nên công thức tổng quát để xác định ứng suất cho một điểm bất kỳ của dầm chịu uốn thuần túy là :

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} . y \quad (6-19)$$

Trong công thức (6-19), M_x là trị số tuyệt đối của mômen uốn tác dụng trên mặt cắt; J_x là mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung hòa x ; y là khoảng cách từ điểm cần tính σ đến trục trung hòa của mặt cắt. Công thức lấy dấu + nếu điểm ta xét nằm trong miền chịu kéo, lấy dấu - nếu điểm đó nằm trong vùng chịu nén.

Từ kết quả, ta có thể kết luận:

Ứng suất pháp ở một điểm bất kỳ trên mặt cắt của dầm chịu uốn, tỷ lệ thuận với mômen uốn và khoảng cách từ điểm đó đến trục trung hòa, và tỷ lệ nghịch với mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung hòa.

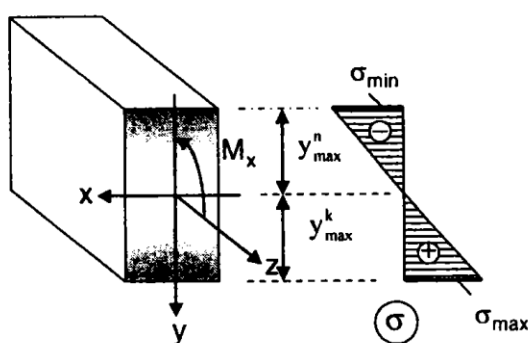
c) Công thức tính σ_{max} , σ_{min} , môđun chống uốn

Với những mặt cắt đối xứng qua trục trung hòa, những điểm xa nhất về hai phía của trục trung hòa bằng nhau, nên khi tính $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$, (σ kéo và σ nén lớn nhất) ta chỉ dùng một trị số $y_{\max}$.

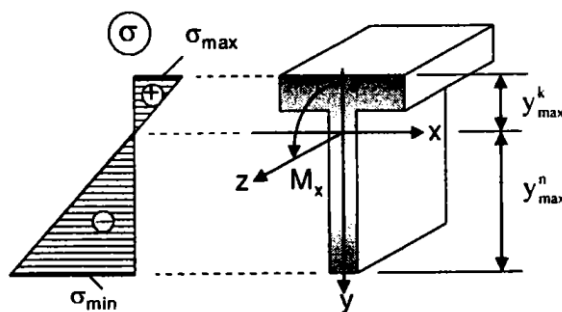
$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{\max}$$

$$\text{Hay: } \sigma_{\max, \min} = \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{\max} = \pm \frac{M_x}{J_x / y_{\max}}$$

Tỷ số $J_x/y_{\max}$ được gọi là *môđun chống uốn* hoặc còn được gọi là *mômen chống uốn* của mặt cắt đối với trục trung hòa x, ký hiệu W_x .



Hình 6.23



Hình 6.24

Vậy ta có thể viết công thức tính $\sigma_{\max, \min}$ trên các mặt cắt đối xứng qua trục trung hòa như sau:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{M_x}{W_x} \quad (6-20)$$

Hình 6.23 và hình 6.24 biểu thị sự phân bố ứng suất pháp $\sigma_{\max, \min}$ trên mặt cắt hình chữ nhật (hai trục đối xứng), và trên mặt cắt hình chữ T (một trục đối xứng)

6.4.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn ngang phẳng

Trong thực tế, dầm ít khi chịu uốn thuần túy mà thường hay chịu *uốn ngang* trên mặt cắt của dầm có cả mômen uốn và lực cắt ($M \neq 0$ và $Q \neq 0$).

Trong trường hợp này, các nhận xét trên về mặt cắt phẳng, về các góc của những hình chữ nhật nhỏ kẻ trên mặt bên không còn đúng nữa. Điều đó chứng tỏ rằng tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt của dầm chịu uốn ngang vừa phát sinh ứng suất pháp σ , vừa phát sinh ứng suất tiếp τ .

Tuy vậy, để xác định ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ta vẫn có thể dùng công thức (6-19):

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y$$

6.4.3. Mặt cắt ngang hợp lý của dầm chịu uốn ngang phẳng

Hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang là sao cho khả năng chịu lực của dầm lớn nhất nhưng đồng thời ít tốn vật liệu nhất. Nếu xét trị tuyệt đối của mômen M_x và khoảng cách từ điểm xa nhất trên mặt cắt tới trục trung hòa x , thì điều kiện là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^k = [\sigma]_k \quad \text{và} \quad : \quad \sigma_{\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^n = [\sigma]_n .$$

$$\text{Lập tỷ số các ứng suất:} \quad \frac{y_{\max}^k}{y_{\max}^n} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \alpha$$

- Nếu vật liệu giòn: $\alpha < 1$ vì $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ nên $y_{\max}^k < y_{\max}^n$: Ta chọn mặt cắt ngang không đối xứng qua trục trung hòa.
- Nếu vật liệu dẻo: $\alpha = 1$, nên $y_{\max}^k = y_{\max}^n$: Ta chọn mặt cắt ngang đối xứng qua trục trung hòa.

Theo biểu đồ ứng suất ta thấy càng gần trục trung hòa ứng suất càng nhỏ, nên tại đó vật liệu làm việc ít hơn ở những điểm xa trục trung hòa, vì vậy thường cấu tạo hình dáng mặt cắt sao cho vật liệu xa trục trung hòa, ví dụ hình chữ I, U, vành khăn, hình rỗng...

Dưới đây là trị số môđun chống uốn W_x của một số mặt cắt thường gặp.

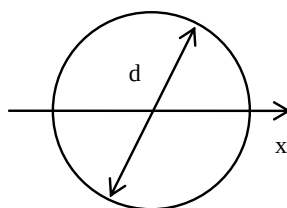
6.4.3.1. Mặt cắt hình tròn

$$\text{Đối với mặt cắt hình tròn (hình 6.25) thì:} \quad J_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

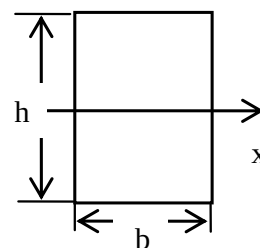
Và $y_{\max} = \frac{d}{2}$, nên:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 \quad (6-21)$$



Hình 6.25



Hình 6.26

6.4.3.2. Mặt cắt hình chữ nhật

Đối với mặt cắt hình chữ nhật (hình 6.26) thì: $J_x = \frac{bh^3}{12}$, và $y_{\max} = \frac{h}{2}$

$$\text{nên } W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

(6-22)

$$\text{Vậy: } W_x = \frac{bh^2}{6}$$

6.4.3.3. Mặt cắt hình khác

Với các mặt cắt hình chữ I, chữ C, vv... thì trị số W_x được ghi trong các bảng

Số hiệu	12	(TCVN 1654-75)
Khối lượng riêng	$g = 10.40$ kg/m	
Chiều cao hình	$h = 120$ mm	
Chiều rộng cánh	$b = 52$ mm	
Chiều dày bụng	$d = 4.80$ mm	
Chiều dày trung bình cánh	$t = 7.80$ mm	
Bán kính lượn góc	$R = 7.50$ mm	
Diện tích tiết diện	$F = 13.30$ cm ²	
Diện tích sơn theo m dài	0.4209 m ² /m	
Diện tích sơn theo khối lượng	40.47 m ² /T	
Mômen quán tính với TTH	$J_x = 304.00$ cm ⁴	
Mômen chống uốn với TTH	$W_x = 50.60$ cm ³	
Bán kính quán tính với TTH	$r_x = 4.78$ cm	
Mômen tĩnh 1/2 mc với TTH	$S_x = 29.60$ cm ³	
Mômen quán tính với y-y	$J_y = 31.20$ cm ⁴	
Mômen chống uốn với y-y	$W_y = 8.52$ cm ³	
Bán kính quán tính với y-y	$r_y = 1.53$ cm	
Kc từ y-y đến mép bụng	$z = 1.54$ cm	

Lưu ý: Diện tích sơn tính theo kích thước thép, không tra theo TCVN

Hình 6.27

cho trước ở các giáo trình, tài liệu hay phần mềm liên quan. Ví dụ, ở hình 5.30

(Chương 5), ta dễ dàng tra ra W_x của mặt cắt thép hình chữ I số hiệu 27a từ phần mềm là $W_x = 407 \text{ cm}^3$.

Với thép hình chữ I số hiệu 12 (như hình 6.27) ta dễ dàng tra ra $W_x = 50,6 \text{ cm}^3$.

6.5. TÍNH TOÁN DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG THEO ĐIỀU KIỆN BỀN VỀ ỨNG SUẤT PHÁP

6.5.1. Điều kiện bền

Khi chịu uốn ngang phẳng mômen uốn trên các mặt cắt có trị số khác nhau. Trên dầm có một mặt cắt chịu mômen uốn M_x lớn nhất (không kể dấu, chỉ kể về trị số tuyệt đối)

Nếu dầm có mặt cắt không thay đổi thì mặt cắt nguy hiểm nhất cần phải kiểm tra là mặt cắt có $M_{\max}$. Tuy nhiên phải phân ra các trường hợp dầm được làm bằng các vật liệu khác nhau sau đây:

6.5.1.1. Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có $[\sigma]_k = [\sigma]_n$. Trong trường hợp này nêu:

a) Dầm có mặt cắt đối xứng qua trục trung hòa thì điều kiện bền về ứng suất pháp là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (6-23)$$

b) Dầm có mặt cắt không đối xứng qua trục trung hòa thì điều kiện bền về ứng suất pháp là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\min}} \leq [\sigma] \quad (6-24)$$

Ở đây $W_{\min}$ là môđun chống uốn nhỏ nhất của mặt cắt đối với trục trung hòa.

6.5.1.2. Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có $[\sigma]_k \neq [\sigma]_n$. Trong trường hợp này điều kiện an toàn của dầm là phải thỏa mãn cả hai điều kiện sau đây:

$$\sigma_{k\max} \leq [\sigma]_k ; \quad \sigma_{n\max} \leq [\sigma]_n \quad (6-25)$$

Gặp trường hợp dầm có mặt cắt đối xứng qua trục trung hòa, vật liệu của dầm chịu nén, chịu kéo khác nhau thì ta chỉ cần thỏa mãn điều kiện $\sigma_{\max}$ phải lớn hơn ứng suất cho phép mà vật liệu chịu đựng kém nhất.

Ví dụ vật liệu chịu kéo kém (gang chẳng hạn) thì điều kiện cường độ về ứng suất pháp của dầm là: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k$

$[\sigma]_k$ là ứng suất pháp cho phép về kéo.

6.5.2. Ba bài toán cơ bản

Từ các điều kiện bền nêu trên ta suy ra ba bài toán cơ bản cho trường hợp dầm làm bằng vật liệu có $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ và dầm có mặt cắt đối xứng qua trục trung hòa là:

- Nếu muốn kiểm tra ứng suất thì phải bảo đảm điều kiện:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

- Nếu muốn chọn mặt cắt thì phải bảo đảm :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

- Nếu muốn xác định tải trọng cho phép thì phải bảo đảm:

$$M_{\max} \leq W [\sigma]$$

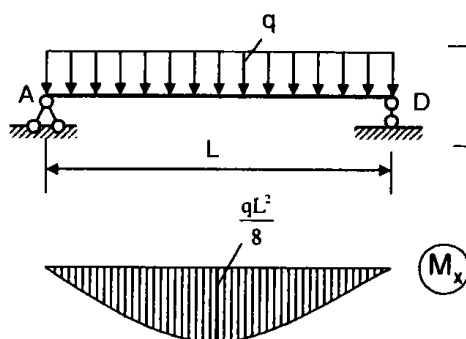
Ở đây chúng ta chỉ giới hạn chủ yếu hai bài toán cơ bản kiểm tra bền về điều kiện ứng suất và kiểm tra mặt cắt dầm.

6.5.3. Các ví dụ

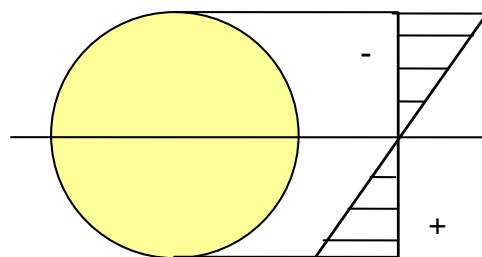
Ví dụ 6.9

Một dầm gỗ hình tròn chịu lực phân bố đều $q = 8000 \text{ N/m}$, chiều dài của dầm $l = 4 \text{ m}$, mặt cắt có đường kính $d = 0,26 \text{ m}$. Dầm được tựa trên hai gối như hình 6.28.

Hãy kiểm tra dầm có an toàn về cường độ không? Cho biết $[\sigma] = 10^7 \text{ N/m}^2$.



Hình 6.28



Hình 6.29

Bài giải

Dầm được tựa trên hai gối và tải trọng phân bố đều nên:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{8000 \cdot 4^2}{8} = 16000 \text{ Nm}$$

Môđun chống uốn (hay mômen chống uốn) đối với trục trung hòa x là:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,26^3}{32} \approx 1725 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$$

$$\text{Vậy: } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{16.000}{1,725 \cdot 10^{-8}} \approx 9,3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

So sánh với $[\sigma]$ ta thấy $\sigma_{\max} \approx 9,3 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 < [\sigma] = 10^7 \text{ N/m}^2$ nên dầm đảm bảo về cường độ.

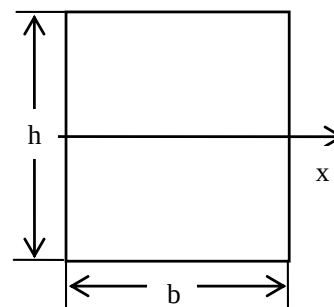
Nếu gặp trường hợp $\sigma_{\max} > [\sigma]$ nhưng không quá 5% thì dầm vẫn được xem là đảm bảo về cường độ.

Ví dụ 6.10

Một dầm gỗ mặt cắt hình chữ nhật có $h = 1,4b$, chịu một mômen uốn lớn nhất là 16000 Nm (hình 6.30).

Hãy chọn kích thước mặt cắt của dầm.

Cho biết $[\sigma] = 10^7 \text{ N/m}^2$.



Hình 6.30

Bài giải

Điều kiện an toàn của dầm là:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{16.000}{10^7} = 1,6 \cdot 10^{-3} m^3$$

Mặt cắt hình chữ nhật nên:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1,4b)^2}{6} \approx 0,33b^3$$

$$\text{Vậy: } b \geq \sqrt[3]{\frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{0,33}} \approx 0,17 \text{ m}$$

$$\text{Và: } h = 1,4b = 1,4 \cdot 0,17 \approx 0,24 \text{ m}$$

Ví dụ 6.11

Hãy chọn kích thước mặt cắt của một dầm thép chữ I chịu tải trọng tác dụng như ở hình 6.31. Cho biết: $P = 8000 \text{ N}$; $[\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$

Bài giải

Vì lực tập trung P đặt giữa dầm nên:

$$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{8000 \cdot 8}{4} = 16000 \text{ Nm}$$

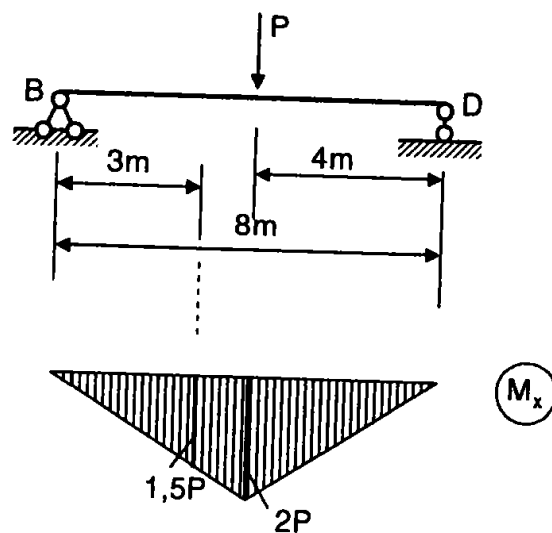
Theo điều kiện an toàn của dầm thì:

$$W_x \geq \frac{16.000}{1,6 \cdot 10^8} = 10^{-4} m^3$$

Giả sử chọn thép chữ I, số hiệu mặt cắt là 16 thì ta có:

$$J_x = 873 \cdot 10^{-8} m^4$$

$$W_x = 10^{-4} m^3$$



Hình 6.31

Ví dụ 6.12

Một dầm thép có mặt cắt hình chữ I số hiệu 22 dài $L = 1$ m. Một đầu bị ngàm, một đầu tự do như hình 6.32.

Hãy xác định lực tác dụng tối đa ở đầu mút tự do cho biết $[\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

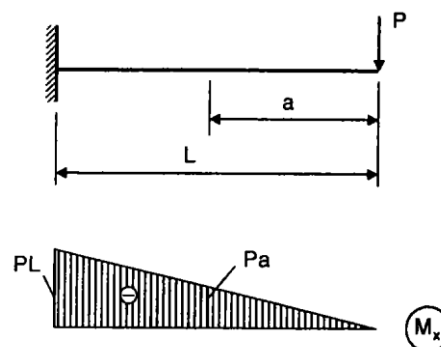
Bài giải

Mô men lớn nhất của dầm là : $M_{\max} = PL$. Tra bảng thép hình thép chữ I, số hiệu 22 ta có: $W_x = 232 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$.

Điều kiện an toàn là:

$$M_{\max} = PL \leq [\sigma] \cdot W = 1,6 \cdot 10^8 \times 232 \cdot 10^{-6} = 37120 \text{ Nm. Vậy:}$$

$$P \leq \frac{37120}{L}. \text{ Vì } L = 1 \text{ m nên } P \leq 37120 \text{ N}$$

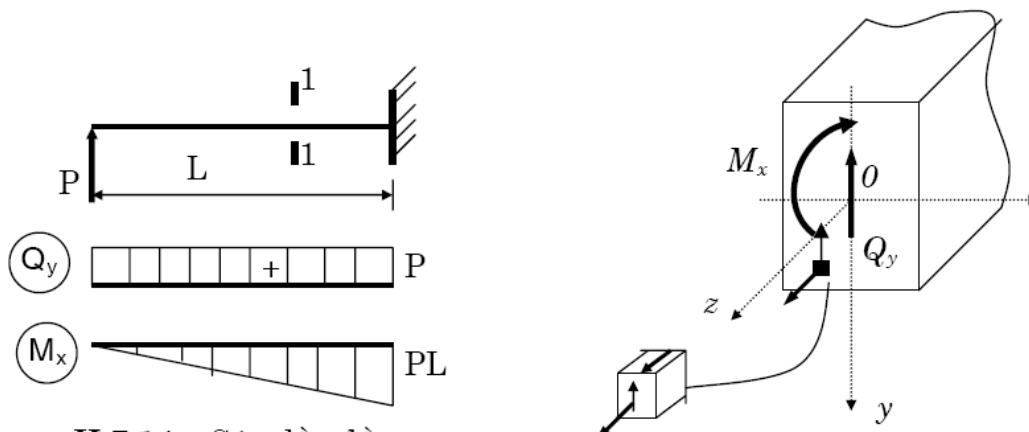


Hình 6.32

6.6. ỨNG SUẤT TIẾP TRÊN MẶT CẮT NGANG CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

6.6.1. Khái niệm

Trước đây chúng ta đã thấy rằng trong uốn phẳng (trừ uốn thuần túy $Q = 0$) trên mặt cắt của dầm luôn luôn phát sinh đồng thời hai loại ứng suất: ứng suất pháp σ và



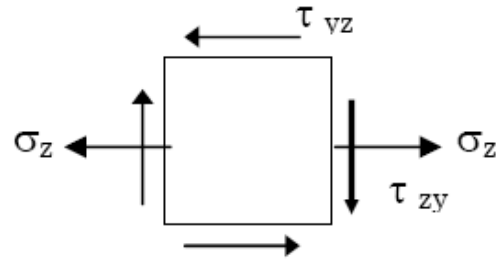
Hình 6.33

ứng suất tiếp τ .

Trong mục 6.4 ta đã nghiên cứu sự phân bố và công thức tính ứng suất pháp σ . Ở mục này ta sẽ tìm hiểu sự phân bố ứng suất tiếp τ và công thức tính τ ở lại một điểm trên mặt cắt bất kỳ của dầm.

Người ta đã chứng minh được rằng: *ứng suất tiếp trên hai mặt phân tố vuông góc với nhau có cùng trị số nhưng trái dấu*. Kết luận này chính là nội dung định luật đối ứng của ứng suất tiếp. Theo định luật đó, nếu trên mặt cắt của dầm phát sinh ứng suất tiếp τ thì trên mặt cắt song song với lớp trung hòa cũng phát sinh τ .

Hình 6.33 thể hiện một ví dụ của dầm chịu uốn ngang phẳng, chịu vừa Q_y vừa M_x và trạng thái ứng suất của một phân tố có các mặt song song với trục tọa độ.

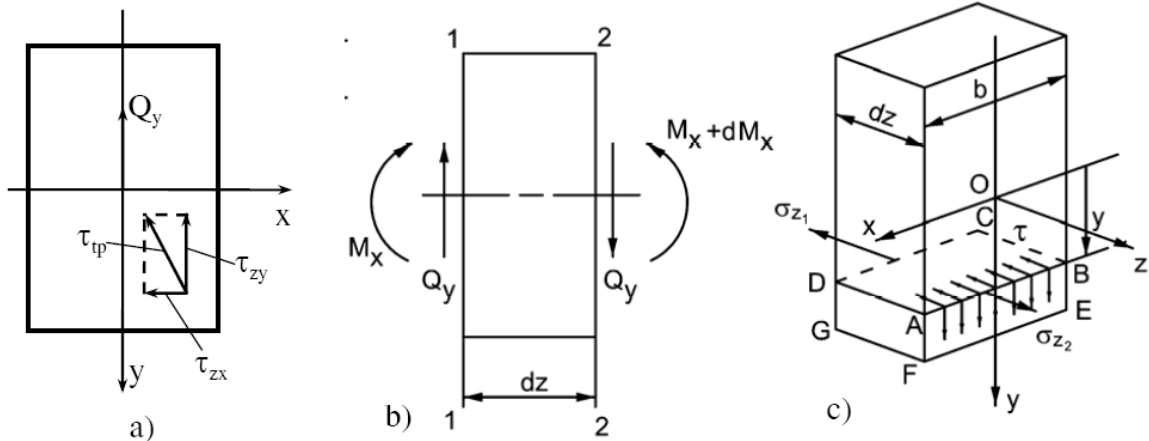


Hình 6.34

Hình 6.34 biểu thị trạng thái ứng suất phẳng của phân tố, gồm ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

6.6.2. Công thức tính ứng suất tiếp tại điểm bất kỳ

Xét mặt cắt ngang như hình 6.35a, có ứng suất tiếp τ_{zx} và τ_{zy} . Theo *Định luật đối ứng*, ứng suất tiếp (mặt ngoài dầm không chịu ngoại lực theo phương z) nên $\tau_{zx} = 0$, có nghĩa tại điểm xét có $\tau = \tau_{zy}$. Từ lý thuyết đàn hồi suy ra giả thiết tất cả



Hình 6.35

các ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang đều song song với lực cắt, và ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều rộng của mặt cắt ngang.

Bây giờ ta tách từ dầm một đoạn vi phân có chiều dài dz (hình 6.35b), sau đó bằng mặt cắt ABCD song song và cách mặt phẳng Oxz một khoảng y chia đoạn dầm này thành hai phần và xét phần phía dưới không chứa gốc O (ABCDEFGH)

Gọi σ_{z_1} và σ_{z_2} là ứng suất pháp trên các mặt cắt 1-1 và 2-2, $b(y) = AB$ và F_c là diện tích của mặt cắt ABEF, b_c là chiều rộng của phần diện tích đó tại điểm cách trục trung hòa y . Theo công thức tính ứng suất pháp ta có:

$$\sigma_{z_1} = \frac{M_x}{J_x} y ; \sigma_{z_2} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (a)$$

Xét cân bằng của phần tổ nằm dưới đang xét theo trục z ta có:

$$\sum F_z = \int_{F_c} \sigma_{z_1} dF - \int_{F_c} \sigma_{z_2} dF + \tau_{yz} \cdot b_c \cdot dz = 0 \quad (b)$$

Thay (a) vào (b) và chú ý rằng $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, ta có:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \int_{F_c} \frac{Q_y \cdot y}{J_x \cdot b_c} dF \text{ hay : } \tau_{zy} = \frac{Q_y}{J_x \cdot b_c} \int_{F_c} y dF = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \cdot b_c} \quad (6-26)$$

Trong đó, S_x^c là mômen tĩnh của diện tích F_c đối với trục trung hòa x . Với mặt cắt là dải chữ nhật hẹp: $S_x^c = \xi \cdot F_c$, với ξ là tọa độ trọng tâm phần tiết diện bị cắt đối với trục trung hòa.

Công thức (6-26) được gọi là *công thức Giu-rap-xki* (1855), với:

- Q_y là trị số tuyệt đối của lực cắt tại mặt cắt chứa điểm cần tìm ứng suất;
- J_x là mômen quán tính của toàn mặt cắt đối với trục trung hòa;
- S_x^c là trị số tuyệt đối của mômen tĩnh đối với trục trung hòa x của phần diện tích của mặt cắt ở phía trên hay dưới đường thẳng song song với trục trung hòa đi qua điểm cần tìm ứng suất;
- b_c là chiều rộng của mặt cắt tại điểm cần tìm ứng suất.

Từ kết quả này ta có thể kết luận:

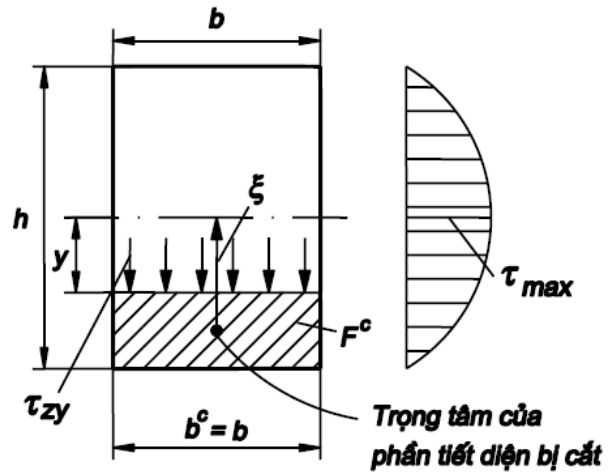
Trị số ứng suất tiếp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt của dầm, tỷ lệ thuận với lực cắt và mômen tĩnh của phần diện tích bị cắt đối với trục trung hòa và tỷ lệ nghịch với mômen quán tính của mặt cắt và chiều rộng của mặt cắt tại điểm đang xét. Ứng suất tiếp τ cùng phương và chiều với lực cắt Q .

6.6.3. Sự phân bố của ứng suất tiếp và công thức tính ứng suất tiếp lớn nhất của một số hình thường gặp

6.6.3.1. Mặt cắt hình chữ nhật

Áp dụng công thức (6-26) xác định ứng suất tiếp τ đối với mặt cắt hình chữ nhật.

Đối với dầm có mặt cắt chữ nhật thì tỷ số $\frac{Q}{bJ_x}$ tại mặt cắt là một hằng số. Ta chỉ cần tính $S_{cắt}$ khi cần tìm τ của một điểm bất kỳ cách trục trung hòa một khoảng là y .



Hình 6.36

Ta đã biết:

$$S_x^c = F_c \cdot \xi$$

ξ là khoảng cách từ trọng tâm F_c đến trục trung hòa. Theo hình 6.36 thì :

$$F_c = b \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) + y = \frac{1}{4} h - \frac{y}{2} + y = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right); \quad \text{Vậy:}$$

$$S_x^c = F_c \cdot \xi = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$S_x^c = \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)$$

Thay giá trị của S_x^c và $b = b_c$ vào công thức (6-26), ta được công thức tính ứng suất tiếp τ trên mặt cắt chữ nhật:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{bJ_x} \cdot \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2) \quad ; \quad \text{Hay:} \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y}{8J_x} (h^2 - 4y^2) \quad (6-27)$$

Với kết quả này ta thấy τ phân bố biến thiên theo một đường parabol bậc hai.

Tại trục trung hòa $y = 0$ nên ứng suất tiếp τ đạt giá trị lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y}{8J_x} h^2 = \frac{Q_y h^2}{8 \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$$

Mà tích số bh là diện tích mặt cắt hình chữ nhật nên ta viết:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} \quad (6-28)$$

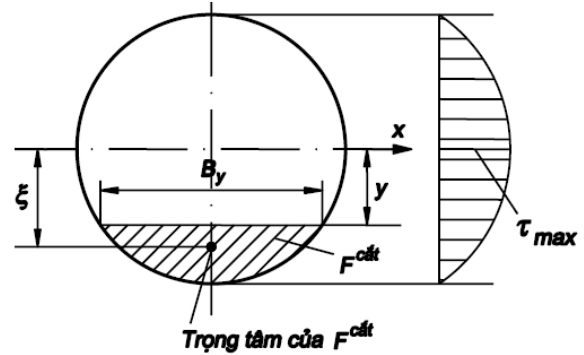
Ở những điểm ngoài cùng về hai phía của trục trung hòa có $y_{\max} = \frac{h}{2}$ nên $\tau = 0$ và có sự phân bố τ như hình 6.36. Công thức 6-28 là công thức tính ứng suất tiếp lớn nhất của mặt cắt ngang hình chữ nhật.

6.6.3.2. Mặt cắt ngang hình tròn

Ta có: $J_x = \frac{\pi R^4}{4}$; $b_c = 2\sqrt{R^2 - y^2}$

$S_x^c = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}$. Từ đây tính toán tương tự như mặt cắt hình chữ nhật ta suy ra:

$$\tau_{zy} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4}(R^2 - y^2) \quad (6-29)$$



Hình 6.37

Như vậy, biểu đồ phân bố ứng suất tiếp của mặt cắt ngang cũng là bậc hai, như hình vẽ 6.37 thể hiện.

Từ 6-29 dễ dàng nhận ra ứng suất tiếp lớn nhất tại $y = 0$, và với $F = \pi R^2$ ta có:

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4Q_y}{3F} \quad (6-30)$$

Công thức 6-30 là công thức tính ứng suất lớn nhất cho mặt cắt ngang hình tròn.

6.6.3.3. Mặt cắt ngang thép hình chữ I

Tương tự ta có : $\tau_{zy} = \frac{Q_y(S_x - \frac{dy^2}{2})}{J_x \cdot d}$ và suy ra:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x}{J_x \cdot d} \quad (6-31)$$

Trong đó, $S_x^c = S_x - d \cdot y \cdot \frac{y}{2}$, với S_x là mômen tĩnh một nửa chữ I.

6.6.4. Điều kiện bền về ứng suất tiếp và bài toán kiểm tra bền

6.6.4.1. Điều kiện bền về ứng suất tiếp

Điều kiện bền về ứng suất tiếp chính là kiểm tra trong mặt cắt ngang có ứng suất tiếp lớn nhất đem so sánh và thỏa mãn nhỏ hơn hoặc bằng ứng suất tiếp cho phép:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (6-32)$$

Đối với thanh chịu uốn ngang phẳng, trên dầm có ba loại điểm có khả năng nguy hiểm, do đó cần tiến hành kiểm tra bền với cả ba loại điểm này. Độ bền của dầm được quyết định theo loại điểm nguy hiểm nhất trong ba điểm đó.

Điểm loại 1: Điểm này nằm ở mép ngoài của dầm, xa đường trung hòa nhất, ở trạng thái ứng suất đơn, nên điều kiện bền cho điểm này giống như trường hợp dầm chịu uốn thuần túy đã học.

Điểm loại 2: Điểm này nằm ở trên lớp trung hòa, ở trạng thái trượt thuần túy. Điều kiện bền là: $\tau_{\max} \leq [\tau]$ (là công thức 6-32).

Điểm loại 3: là những điểm còn lại trên mặt cắt. Các điểm này ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt có trị số ứng suất pháp σ và ứng suất tiếp τ khác không. Điểm nguy hiểm thường là điểm mà ở đó mặt cắt ngang có sự thay đổi đột ngột về bề rộng. Điều kiện bền được thiết lập theo các lý thuyết bền. Ví dụ, theo lý thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (lý thuyết bền 3), người ta quy về ứng suất tương đương rồi kiểm tra bền:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (6-33)$$

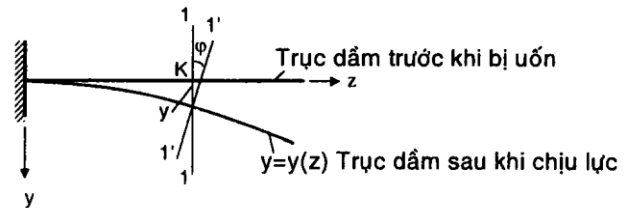
6.6.4.2. Bài toán kiểm tra bền

Trong ba bài toán (kiểm tra bền về ứng suất pháp, chọn kích thước mặt cắt ngang và xác định tải trọng) cho dầm chịu uốn ngang phẳng, người ta thường xuất phát từ các điều kiện bền ứng suất pháp. Sau đó, nếu cần thiết ta mới kiểm tra điều kiện bền về trượt theo (6-32) và điều kiện bền khi có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp (ví dụ mặt cắt chữ I). Tại chỗ tiếp giáp giữa lòng và đế ứng suất pháp và ứng suất tiếp đều khá lớn và người ta cũng chỉ quan tâm khi trên mặt cắt đó giá trị mômen uốn, lực cắt Q đều rất lớn.

6.7. KHÁI QUÁT VỀ CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

6.7.1. Khái niệm về đường đàn hồi - Độ võng góc xoay

Khi bị uốn phẳng, trục của dầm không thay đổi chiều dài (vì nó nằm trên lớp trung hòa), nhưng bị uốn cong trong mặt phẳng tải trọng.



Dạng của trục dầm sau khi bị uốn cong được gọi là *đường đàn hồi* của dầm.

Hình 6.38

Lấy dầm, một đầu bị ngàm, đầu kia tự do và chịu một lực P tác dụng (lực P gây ra mômen uốn tương đối với dầm). Để nghiên cứu ta quy ước chọn hệ trục Ozy (O là tại ngàm) như hình 6.38. Dưới tác dụng của P dầm bị uốn cong, trọng tâm K của mặt cắt cách gốc tọa độ một khoảng z sẽ dời đến K_1 . Độ dời y của trọng tâm mặt cắt theo phương vuông góc với trục dầm được gọi là độ võng của mặt cắt. Nói chung K và K_1 không cùng nằm trên một đường thẳng đứng, nhưng ta thường nghiên cứu dầm có biến dạng rất bé, nên để đơn giản việc tính toán ta có thể xem K và K_1 cùng nằm trên một đường thẳng đứng, do đó $KK_1 = y$.

Khi dầm biến dạng thì các mặt cắt vẫn phẳng, nhưng có xoay đi một góc φ so với vị trí ban đầu. Góc φ được gọi là *góc xoay của mặt cắt*. Dấu của góc xoay được quy ước như sau:

- Góc xoay có dấu âm, khi mặt cắt xoay thuận chiều quay của kim đồng hồ.

- Góc xoay có dấu dương, khi mặt cắt xoay ngược chiều quay của kim đồng hồ.

Ta thấy độ võng y của các mặt cắt phụ thuộc vào hoành độ z của chúng, nghĩa là $y = y(z)$

$y = y(z)$ được gọi là *phương trình đường đàn hồi của dầm*.

Góc xoay của một mặt cắt có hoành độ z bằng góc hợp bởi trục hoành và đường tiếp tuyến với đường đàn hồi tại điểm đó. Độ dốc của đường tiếp tuyến tại một điểm nào đó của đường cong có hoành độ z thì bằng $\tan \varphi$, và $\tan \varphi = \frac{dy}{dz}$. Nhưng góc xoay φ rất bé nên $\tan \varphi \approx \varphi$ có thể viết:

$$\varphi = \frac{dy}{dz} \quad (6-34)$$

Kết quả này cho ta thấy: *Góc xoay của mặt cắt bằng trị số của đạo hàm bậc một của độ võng tại mặt cắt đó.*

6.7.2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi

Để thiết lập hệ thức cho phép xác định hàm số biểu diễn đường đàn hồi, ta tiến hành như sau:

Lấy hai mặt cắt rất gần nhau để nghiên cứu, chẳng hạn O và I , là trọng tâm của hai mặt cắt đó. Dưới tác dụng của lực P , O đi xuống O' , I đi xuống I' . Mặt cắt O có góc xoay là φ , mặt cắt I có góc xoay $\varphi + d\varphi$. Hai mặt này hợp với nhau một góc $d\varphi$.

Nếu gọi bán kính cong của $O'I'$ là ρ , hoành độ của O là z , hoành độ của I là $z + dz$ (nghĩa là $OI = dz$) thì: $O'I' = \rho d\varphi$. Vậy ta có thể viết một cách gần đúng là:

$$dz + \rho d\varphi \text{ hay } \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz}$$

Trong uốn thuần túy ta đã chứng minh được: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$ (công thức 6-18)

$$\text{Do đó ta có: } \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

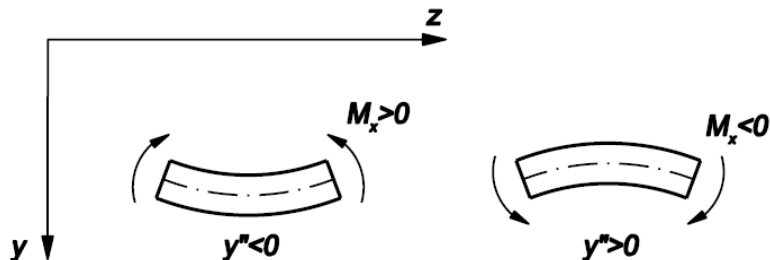
$$\text{Vì } \varphi \text{ bằng đạo hàm bậc một của } y, \text{ nên: } \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2 y}{dz^2}$$

Vậy ta có sự liên hệ vi phân như sau:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (6-35)$$

Phương trình này được gọi là *phương trình vi phân gần đúng* của đường đàn hồi và chỉ áp dụng được khi biến dạng của dầm nhỏ.

Chúng ta nhận thấy rằng dấu mômen uốn không phụ thuộc vào hệ tọa độ mà chỉ phụ thuộc vào sự quy ước, còn $\frac{d^2 y}{dz^2}$ thì phụ thuộc vào hệ tọa độ Oyz. Nếu hệ trục tọa độ chọn như hình 6.39 thì:



Hình 6.39

$y'' = \frac{d^2 y}{dz^2} > 0$, khi bề lõm hướng xuống dưới, nghĩa là khi $M < 0$

$y'' = \frac{d^2 y}{dz^2} < 0$, khi bề lõm hướng lên trên, nghĩa là khi $M > 0$

Phương trình (6-35) có thể viết như sau:

$$M_x = EJ_x \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (6-36)$$

6.7.3. Tính độ võng và góc xoay của dầm chịu uốn bằng phương pháp tích phân bất định

Nếu độ cứng EJ của dầm không đổi thì lấy tích phân cả 2 vế của (6-36):

Tích phân lần thứ nhất, ta được:

$$EJ \cdot \frac{dy}{dz} = \int M dz + C_1 \quad (a)$$

Tích phân lần thứ hai được:

$$EJ \cdot y = \int dz \int M dz + C_1 z + C_2 \quad (b)$$

Với (a) sẽ tìm được :

$$\varphi = \frac{dy}{dz} = \frac{1}{EJ} \left[\int Mdz + C_1 \right] \quad (c)$$

Với (b) sẽ tìm được

$$y = \frac{1}{EJ} \left[\int dz \int Mdz + C_1 z + C_2 \right] \quad (d)$$

Khi lấy tích phân lần thứ nhất, lần thứ hai của mômen uốn ta sẽ được các hằng số tích phân. Muốn xác định các hằng số tích phân đó ta cần dựa vào các điều kiện biên của dầm.

Sau đây là một ví dụ tính biến dạng dầm theo phương pháp tích phân.

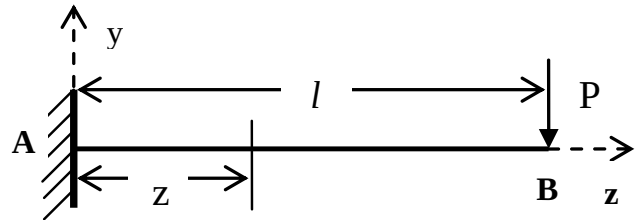
Ví dụ 6.13

Viết phương trình góc xoay, độ võng và tính $\varphi_{\max}$, $y_{\max}$ của dầm AB. Dầm có chiều dài l , EJ = hằng số và chịu tải trọng như hình 6.40.

Bài giải

Lấy A làm gốc và chọn các trục tọa độ Ayz như hình 6.40,

1) *Viết biểu thức mômen uốn của dầm:*



Hình 6.40

$$M(z) = -P(l-z) = -Pl + Pz$$

2) *Tìm φ và y :*

Theo (a) và (b) ta có :

$$EJ \varphi = \int M(z) dz = \int [-Pl + Pz] dz = -Plz + P \frac{z^2}{2} + C_1$$

$$EJy = \int [-Plz + P \frac{z^2}{2} + C_1] dz = -Pl \frac{z^2}{2} + \frac{Pz^3}{6} + C_1 z + C_2$$

Để xác định các hằng số C_1 , C_2 , ta dựa vào điều kiện biên giới của dầm.

Đầu A bị chèn nên tại mặt cắt đó $\varphi = 0$, $y = 0$. Nghĩa là khi $z = 0$ thì:

$$-Plz + P \frac{z^2}{2} C_1 = 0 \quad (1)$$

$$-Pl \frac{z^2}{2} + \frac{Pz^3}{6} + C_1 z + C_2 = 0 \quad (2)$$

Thay $z=0$ vào (1) và (2) ta được $C_1 = 0$: $C_2 = 0$, vậy:

$$EJ\varphi = -Plz + \frac{Pz^2}{2} = -\frac{Plz}{2} \left(2 - \frac{z}{l}\right) \text{ và } \varphi = -\frac{plz}{2EJ} \left(2 - \frac{z}{l}\right)$$

$$EJy = -\frac{Plz^2}{2} + \frac{Pz^3}{6} = -\frac{Plz^2}{6} \left(3 - \frac{z}{l}\right)$$

$$\text{Và } y = -\frac{Plz^2}{6EJ} \left(3 - \frac{z}{l}\right)$$

3) Tính $\varphi_{\max}$ và $y_{\max}$:

Với phương trình của φ và y tìm được ta thấy khi $z = z_{\max}$ thì $\varphi = \varphi_{\max}$ và $y = y_{\max}$. Ở đây $z_{\max} = l$ nên ở B có:

$$\varphi_B = \varphi_{\max} = -\frac{Pl^2}{2EJ}$$

$$y_B = y_{\max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}$$

Dấu (-) cho biết φ_B quay theo chiều quay của kim đồng hồ và y_B võng xuống phía dưới.

Tiến hành tương tự, ta có thể xác định được biểu thức tính độ võng, góc xoay ở một mặt bất kỳ cũng như trị số độ võng góc xoay lớn nhất của các dầm thường gặp.

6.7.4. Điều kiện cứng của dầm

Muốn dầm được an toàn thì phải thỏa mãn cả hai điều kiện: điều kiện cường độ (ta đã nói ở các mục trên) và điều kiện cứng. Điều kiện an toàn về độ cứng được thỏa mãn khi biến dạng của dầm không được vượt quá biến dạng cho phép:

$$\begin{aligned} \varphi_{\max} &\leq [\varphi] \\ y_{\max} &\leq [y] \end{aligned} \quad (6-37)$$

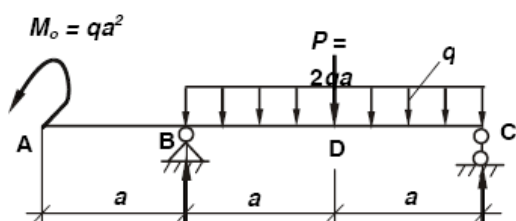
Ví dụ, đối với nhịp cầu thì $[y]$ nằm trong khoảng từ $\frac{1}{1000}$ đến $\frac{1}{750}$ của chiều dài nhịp. Đối với các dầm thép thì $[y]$ nằm trong khoảng từ $\frac{1}{1000}$ đến $\frac{1}{250}$ của chiều dài nhịp. Đối với các ván gác thì độ võng cho phép $[y]$ nằm trong khoảng $\frac{1}{400}$ đến $\frac{1}{250}$ của chiều dài nhịp v.v ...

CÂU HỎI ÔN TẬP

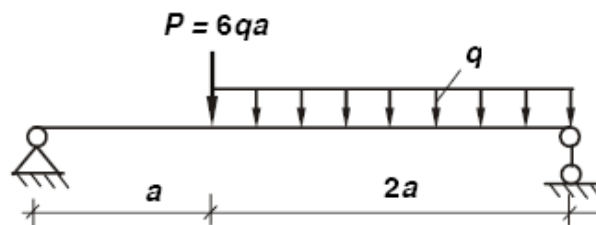
1. Thế nào là một thanh chịu uốn phẳng ?
2. Trình bày quy tắc xác định nội lực (Q,M) và qui ước về dấu của chúng.
3. Nêu trình tự để làm một bài toán vẽ biểu đồ nội lực.
4. Nêu mối liên hệ vi phân giữa Q, M và q. Phát biểu các nhận xét rút ra từ các liên hệ trên và các ứng dụng của chúng.
5. Trình bày phương pháp vẽ biểu đồ Q và M theo những điểm đặc biệt và theo phương pháp cộng tác dụng.
6. Thế nào là một đoạn dầm bị uốn thuần túy? Trong uốn thuần túy ứng suất pháp trên các mặt cắt phân bố như thế nào? Viết công thức tính ứng suất pháp σ .
7. Phát biểu điều kiện cường độ về ứng suất pháp. Có ba bài toán cơ bản nào?
8. Viết công thức tính ứng suất tiếp τ trên mặt cắt ngang hình chữ nhật và biểu thị sự phân bố τ .
9. Khi kiểm tra biến dạng của dầm phải thỏa mãn những điều kiện gì?

BÀI TẬP

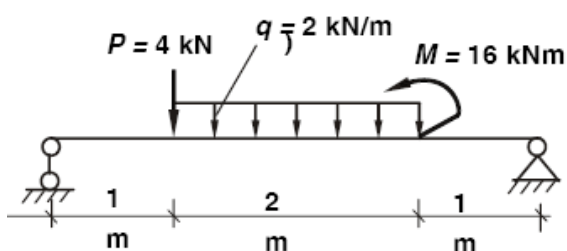
1. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm có sơ đồ tính toán như các hình dưới đây:



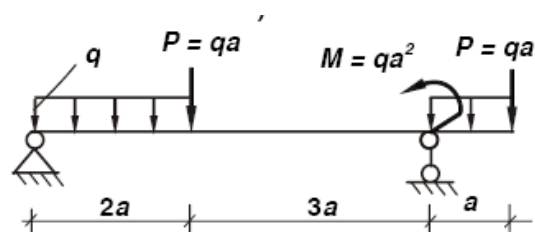
Hình 6.41



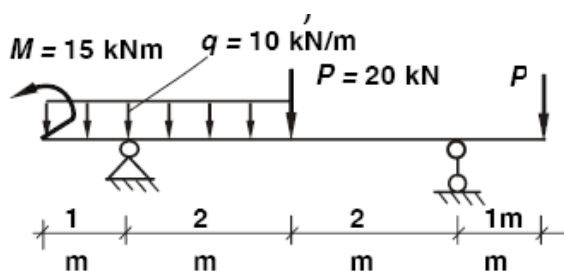
Hình 6.42



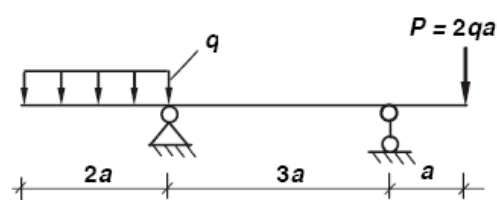
Hình 6.43



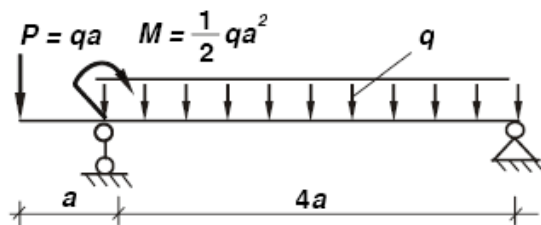
Hình 6.44



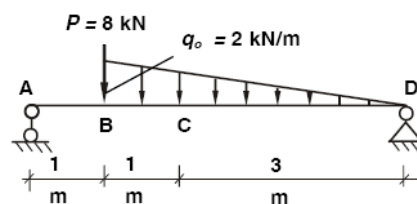
Hình 6.45



Hình 6.46



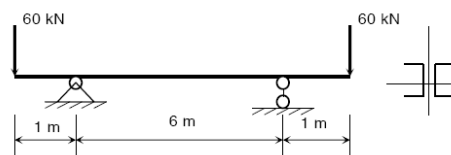
Hình 6.47



Hình 6.48

2. Chọn số hiệu mặt cắt của dầm ghép bằng hai thép hình [] theo yêu cầu độ bền, biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$

(hình 6.49)

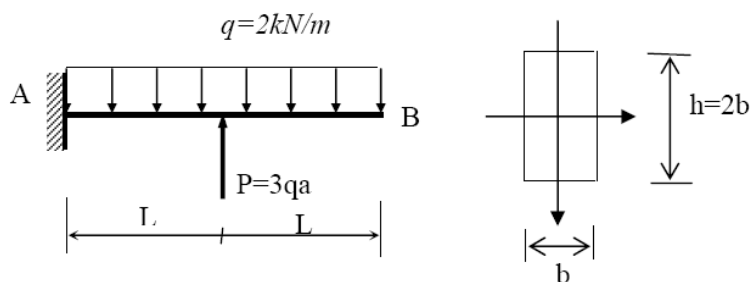


Hình 6.49

3.

Xác định kích thước mặt cắt ngang dầm hình chữ nhật chịu lực như hình vẽ 6.50.

Biết $L = 1 \text{ m}$, $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$, $h = 2b$.

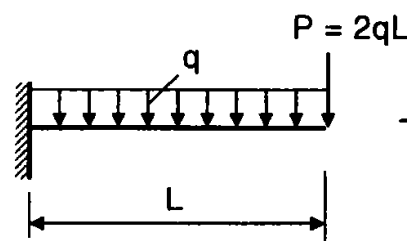


Hình 6.50

4.

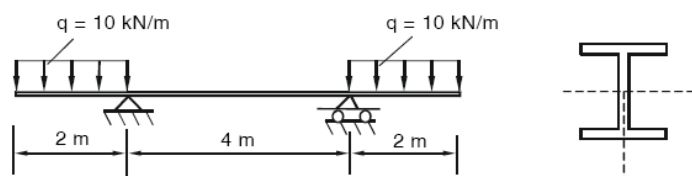
Một dầm mặt cắt chữ I có một đầu bị ngàm, một đầu tự do. Dầm chịu tác dụng của lực phân bố đều $q = 10^4 \text{ N/m}$ trên suốt chiều dài $L = 1,5 \text{ m}$ và một lực tập trung ở đầu tự do $P = 3 \cdot 10^4 \text{ N}$ như hình vẽ 6.51.

Chọn số hiệu của mặt cắt nếu $[\sigma] = 1,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$



Hình 6.51

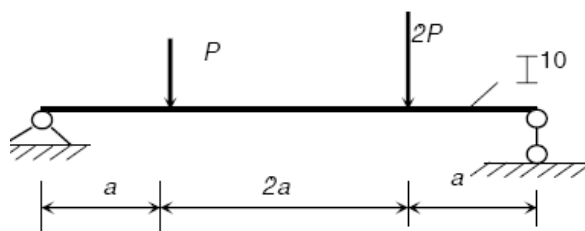
5. Dầm làm bằng thép mặt cắt ngang thép hình chữ I tựa đơn và có hai đầu mút thừa như hình vẽ 6.52. Dầm chịu tác dụng của lực phân bố đều $q = 10 \text{ kN/m}$ ở mỗi đầu mút thừa. Giả sử mặt cắt ngang chữ I có số hiệu 16 có $W_x = 109 \text{ cm}^3$, hãy xác định $\sigma_{\max}$ trong dầm do q gây ra.



Hình 6.52

6.

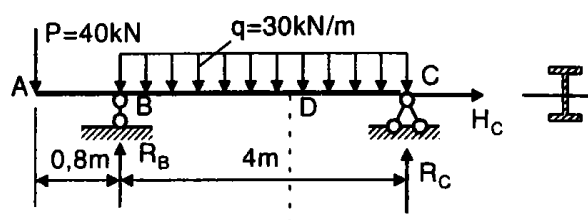
Xác định lực tác dụng P tối đa của dầm thép hình chữ I, số hiệu 10 cho trên hình vẽ 6.53. Biết $a = 80 \text{ cm}$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 6.53

7.

Cho dầm thép chữ I chịu lực như hình vẽ 6.54. Vật liệu dầm có $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Tải trọng tác dụng có $P = 40 \text{ kN}$, $q = 30 \text{ kN/m}$. Xác định số hiệu mặt cắt ngang của dầm theo điều kiện bền ứng suất pháp.



Hình 6.54

8. Chọn mặt cắt của một dầm gỗ hình chữ nhật $b = \frac{2}{3}h$ chịu một mô men uốn lớn nhất là $M_{\max} = 3 \cdot 10^4 \text{ Nm}$. Gỗ có $[\sigma] = 10^7 \text{ N/m}^2$.

HẾT CHƯƠNG 6

Chương 7. THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

7.1. KHÁI NIỆM

7.1.1. Khái niệm về thanh chịu lực phức tạp

Trong những chương trên, ta đã nghiên cứu hai hình thức biến dạng cơ bản của thanh thẳng: kéo (nén), uốn phẳng.

Nhưng trong thực tế, có những bộ phận máy hay kết cấu thường chịu tác dụng đồng thời của nhiều hình thức biến dạng cơ bản. Ví dụ: thân của cần trục vừa chịu kéo vừa chịu uốn, một đập chắn nước vừa chịu nén vừa chịu uốn...

Đôi khi lực tác dụng tưởng chừng như đơn giản, nhưng hình thức biến dạng lại không thể liệt vào một trong các loại biến dạng cơ bản. Ví dụ: một xà gỗ trên mái nhà chịu uốn, tuy lực tác dụng vuông góc với trục xà nhưng lại không nằm trong một mặt phẳng đối xứng của mặt cắt, do đó xà không phải chịu uốn phẳng; một trụ chịu nén, nhưng lực nén lại không trùng với trục của trụ, do đó cũng không phải là hình thức nén đúng tâm. Trong các ví dụ trên ta nói rằng *thanh chịu lực phức tạp*.

7.1.2. Khái quát về cách xác định nội lực, ứng suất trong thanh chịu lực phức tạp

Muốn tính được ứng suất và biến dạng, để tính được cường độ và độ cứng của các thanh chịu lực phức tạp, chúng ta dựa vào *nguyên lý độc lập của các lực tác dụng*, nghĩa là ta đem các hình thức tác dụng phức tạp của lực phân tích ra các hình thức cơ bản đã trình bày ở các chương trên, rồi đem cộng các kết quả cùng loại đã thu được.

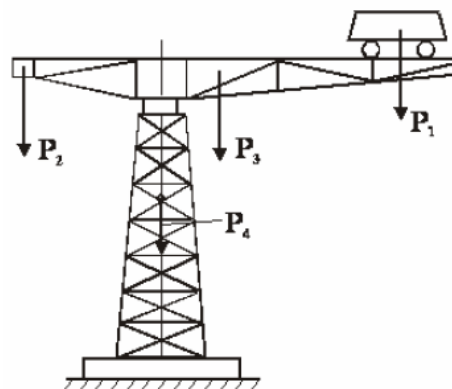
Ta áp dụng được nguyên lý này là vì trong giới hạn đàn hồi, biến dạng rất nhỏ, do đó không có ảnh hưởng đến vị trí tương đối của các lực, cũng như kích thước chủ yếu của thanh.

Chú ý rằng ứng suất tiếp τ do lực cắt Q gây ra thường nhỏ nên trong chương này ta bỏ qua, không xét đến.

7.2. NÉN LỆCH TÂM

7.2.1. Khái niệm

Khi một thanh thẳng chịu tác dụng của hai lực trực đối, có phương song song với trục của thanh, nhưng phương đó lại không trùng với trục của thanh: ta nói thanh đó chịu nén (hay kéo) lệch tâm. Điểm đặt của lực lúc này không còn trùng với trọng tâm của mặt cắt của thanh nữa.



Hình 7.1

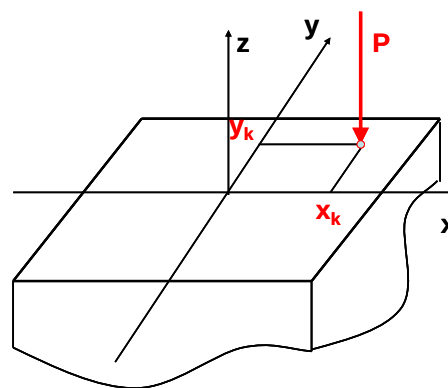
Ví dụ, một trụ cầu đỡ hai nhịp cầu bằng nhau, khi không có tác dụng gì khác ngoài trọng lượng bản thân hai nhịp cầu thì vì tính chất đối xứng ta có thể coi như trụ chịu nén trung tâm. Nhưng khi có một đoàn tàu chạy trên một nhịp tính chất đối xứng mất đi, điểm tác dụng của hợp lực không còn đặt ở trọng tâm của tiết diện trụ cầu nữa, lúc đó trụ cầu bị nén lệch tâm.

Ví dụ khác, một trụ giá cần cẩu (hình 7.1) cũng dẫn tới nén lệch tâm.

7.2.2. Nội lực và biểu đồ nội lực

Sơ đồ một cột chịu nén lệch tâm như hình 7.2.

Khoảng cách từ vị trí lực P (K) tới tâm O của mặt phẳng Oxy là e , gọi là độ lệch tâm, hay khoảng cách lệch tâm. Muốn đưa hình thức nén lệch tâm về dạng cơ bản, ta chỉ cần dời P về tâm O của mặt cắt. Khi đó ta sẽ có 3 thành phần: Lực dọc $N_z = -P$; mômen $M_x = P.y_K$, mômen $M_y = P.x_K$. Như vậy ta sẽ có hai bài toán cơ bản: Thanh chịu nén đúng tâm bởi lực P và thanh chịu uốn bởi mômen M_x và M_y .



Hình 7.2

Cả hai trường hợp này chúng ta đã học cách xác định nội lực và vẽ biểu đồ nội lực ở Chương 5 (Kéo nén đúng tâm) và Chương 6 (Uốn ngang phẳng).

Sau khi vẽ biểu đồ cho hai trường hợp riêng rẽ, theo phương pháp cộng tác dụng (đã giới thiệu ở Chương 6) chúng ta sẽ vẽ được biểu đồ nội lực của thanh chịu nén lệch tâm.

7.2.3. Ứng suất

Do giới hạn bởi chương trình, ta chỉ xét một thanh mặt cắt hình chữ nhật (hình 7.3) chịu nén bởi một lực P đặt lệch tâm.

Lực P đặt tại E trên trục đối xứng Ox của mặt cắt.

Khoảng cách $OE = e$ được gọi là khoảng cách lệch tâm. Muốn đưa hình thức nén lệch tâm này về các hình thức cơ bản đã nghiên cứu ở các chương trên, chúng ta thu lực P về tâm O của mặt cắt. Làm như vậy sẽ được một lực P đặt ở O gây ra nén đúng tâm và một ngẫu lực trong mặt phẳng xOz có mô men $M_y = P.e$ gây ra uốn phẳng.

Qua đó ta thấy rằng nén lệch tâm là một trường hợp đặc biệt của chịu nén đúng tâm và chịu uốn. Do đó công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ cách trục Oy một đoạn x là:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{J_y} x \quad (7-1)$$

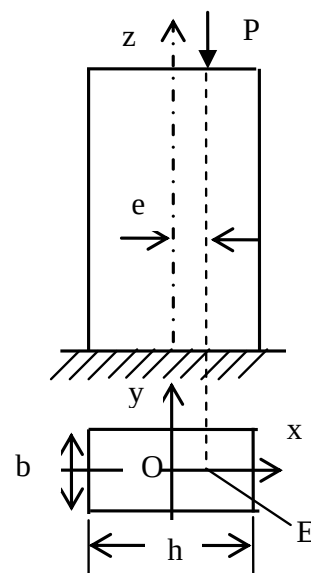
Từ công thức trên suy ra công thức tính ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} \quad (7-2)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{W_y} \quad (7-3)$$

Lưu ý, các trị số N , M_y lấy giá trị tuyệt đối.

Trục trung hòa: Ta đã biết, trục trung hòa của mặt cắt là quỹ tích những điểm có ứng suất pháp bằng không. Muốn tìm trục trung hòa của mặt cắt thanh chịu nén lệch tâm, ta cho ứng suất pháp trong công thức (7-1) bằng không, ta sẽ được:



Hình 7.3

$$-\frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0 \quad (7-1')$$

Trong công thức trên, x_0 là khoảng cách đến trục y của các điểm trên trục trung hòa và ta chỉ lấy dấu (+) ở số hạng thứ hai vì nếu cả hai số hạng đều là âm thì tổng số đại số không thể bằng không được.

Theo hình 7.3, trục trung hòa phải ở phía bên trái trục y , nghĩa là trục trung hòa và lực P phải ở hai phía khác nhau đối với trục y .

Từ biểu thức (7-1') có thể viết:

$$-\frac{N}{F} + \frac{M_y}{\frac{J_y}{F} \cdot F} x_0 = 0$$

Đặt $\frac{J_x}{F} = i_y^2$ (i_y là bán kính quán tính của mặt cắt F đối với trục y) và thay $N = P$, $M_y = P \cdot e$, ta có:

$$-\frac{P}{F} + \frac{Pe}{Fi_y^2} x_0 = 0 \quad ; \text{ hay : } -\frac{P}{F} \left(1 - \frac{e}{i_y^2} x_0\right) = 0$$

$$\text{Vì } -\frac{P}{F} \neq 0 \text{ nên } 1 - \frac{e}{i_y^2} x_0 = 0; \quad \text{hay: } x_0 = \frac{i_y^2}{e} = \text{hằng số} \quad (7-4)$$

Vậy *trục trung hòa* là một đường thẳng song song với trục y và cách trục y một đoạn cố định bằng $\frac{i_y^2}{e}$. Tổng quát hơn có thể nói rằng *trục trung hòa* là một đường thẳng song song với trục đối xứng thứ hai của mặt cắt nằm trong mặt phẳng chứa lực P .

7.2.4. Điều kiện bền và bài toán kiểm tra bền về ứng suất pháp

Thanh chịu nén lệch tâm gồm chịu nén đúng tâm và uốn đồng thời chỉ gây ra ứng suất pháp trên mặt cắt ngang, tại điểm nguy hiểm, phân tử ở trạng thái ứng suất đơn, do đó điều kiện bền của thanh là:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_k \quad (7-5)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_n \quad (7-6)$$

Với N , M_y lấy giá trị tuyệt đối;

$[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$ là ứng suất pháp chịu kéo và chịu nén cho phép của dầm.

Từ đây, hoàn toàn có thể suy ra ba bài toán cơ bản kiểm tra bền về ứng suất pháp đã xét trong thanh chịu nén đúng tâm, trong thanh chịu uốn ngang phẳng:

- Bài toán kiểm tra cường độ
- Bài toán chọn diện tích mặt cắt
- Bài toán kiểm tra tải trọng

Ta sẽ xét trong các ví dụ sau.

Ví dụ 7.1

Kiểm tra cường độ của một cột gạch có mặt cắt hình chữ nhật $0,7 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$, cao 3 m chịu tác dụng của một lực nén lệch tâm $P = 1,2 \cdot 10^5 \text{ N}$, khoảng cách lệch tâm $e = 0,15 \text{ m}$ (hình 7.4)

Trọng lượng của 1 m^3 gạch là 16 kN . Ứng suất kéo cho phép của tường gạch là $[\sigma]_k = 10^5 \text{ N/m}^2$. Ứng suất cho phép nén là $[\sigma]_n = 10^6 \text{ N/m}^2$.

Bài giải

Trọng lượng của cột là :

$$W = 1,6 \cdot 10^4 \cdot 0,7 \cdot 0,5 \cdot 3 = 1,68 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Lực nén vào cột gồm cả trọng lượng bản thân, là:

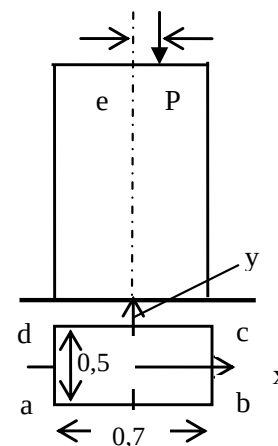
$$P^* = (12 + 1,68) \cdot 10^4 = 13,68 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Mômen uốn do lực lệch tâm gây ra là:

$$M_y = 12 \cdot 0,15 \cdot 10^4 = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Nm} ;$$

Diện tích F của chân cột là: $F = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35 \text{ m}^2$

Modun chống uốn của mặt cắt:



Hình 7.4

$$W_y = \frac{0,5 \cdot 0,7^2}{6} = 0,0408 m^3$$

Tính ứng suất lớn nhất (cạnh ad): $\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{13,68 \cdot 10^4}{0,35} + \frac{1,8 \cdot 10^4}{0,0408}$

$$= (-39 + 44,1) \cdot 10^4 = 0,51 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 < [\sigma_k] = 10^5 \text{ N/m}^2$$

Ứng suất $\sigma_{\min}$ (cạnh bc)

$$\sigma_{\min} = -\frac{P}{F} - \frac{M_y}{W_y} = (-39 - 44,1) \cdot 10^4 = -8,31 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$= 8,31 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = |\sigma_{\min}| < [\sigma]_n = 10^6 \text{ N/m}^2$$

Như vậy cột gạch được đảm bảo cường độ cả về chịu kéo lẫn chịu nén.

Ví dụ 7.2

Chọn bề rộng b của mặt cắt cột gạch như hình 7.4 của ví dụ 7.1 trên đây để cột đảm bảo điều kiện bền. Các số liệu cho đúng như ví dụ 7.1, trừ chiều rộng chưa biết.

Bài giải

Trọng lượng của cột là:

$$W = 1,6 \cdot 0,7 \cdot b \cdot 3 \cdot 10^4 = 3,36 \cdot b \cdot 10^4 \text{ N}$$

Lực nén vào chân cột (là mặt cắt nguy hiểm) là:

$$P^* = (12 + 3,36b) \cdot 10^4 \text{ N}$$

Mômen uốn do lực lệch tâm gây ra là:

$$M_y = 12 \cdot 10^4 \cdot 0,15 = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

Diện tích F của chân cột là: $F = 0,7 \cdot b \text{ m}^2$

Môđun chống uốn của mặt cắt:

$$W_y = \frac{b \cdot 0,7^2}{6} = \frac{0,49b}{6}$$

Thay vào (7-5) tính ứng suất pháp lớn nhất (tại cạnh ad):

$$\sigma_{\max} = -\frac{(12 + 3,36b).10^4}{0,7b} + \frac{1,8.6.10^4}{0,49b} \leq 10^5 \text{ N}$$

Giải phương trình này ta có $b \geq 0,33 \text{ m}$

Thay vào (7-6) tính ứng suất pháp nhỏ nhất (tại cạnh bc):

$$\sigma_{\min} = -\frac{(12 + 3,36b).10^4}{0,7b} - \frac{1,8.6.10^4}{0,49b} \leq 10^6 \text{ N}$$

Giải phương trình này và lấy trị tuyệt đối của $|\sigma_{\min}|$ ta có $b \geq 0,37 \text{ m}$

Như vậy, để đảm bảo điều kiện bền khi cột gạch chịu nén lệch tâm, kể cả chịu nén, kể cả chịu kéo, ta chọn $b = 0,5 \text{ m}$.

Ví dụ 7.3

Kiểm tra tải trọng lực P cho phép tác dụng lên mặt cắt cột gạch như hình 7.4 của ví dụ 7.1 trên đây để cột đảm bảo điều kiện bền. Các số liệu cho đúng như ví dụ 7.1, trừ tải trọng là lực p chưa biết.

Bài giải

Trọng lượng của cột là:

$$W = 1,6.10^4.0,7.0,5.3 = 1,68.10^4 \text{ N}$$

Lực nén vào chân cột (là mặt cắt nguy hiểm) là:

$$P^* = (P + 1,68.10^4) \text{ N}$$

Mômen uốn do lực lệch tâm gây ra là:

$$M_y = P.0,15 \text{ Nm}$$

Diện tích F của chân cột là:

$$F = 0,35 \text{ m}^2$$

Modun chống uốn của mặt cắt:

$$W_y = \frac{0,5.0,7^2}{6} = 0,0408 \text{ m}^3$$

Thay vào (7-5) tính ứng suất pháp lớn nhất (tại cạnh ad):

$$\sigma_{\max} = -\frac{P + 1,68.10^4}{0,35} + \frac{0,15.P}{0,0408} \leq 10^5 \text{ N}$$

Giải phương trình này ta có $P \leq 18,01.10^4 \text{ N}$

Thay vào (7-6) tính ứng suất pháp nhỏ nhất (tại cạnh bc):

$$\sigma_{\min} = -\frac{P + 1,68.10^4}{0,35} - \frac{0,15.P}{0,0408} \leq 10^6 \text{ N}$$

Giải phương trình này và lấy trị tuyệt đối của $|\sigma_{\min}|$ ta có $P \leq 16,0.10^4 \text{ N}$

Như vậy, kể cả chịu nén, kể cả chịu kéo, tải trọng bài ra $P = 12.10^4 \text{ N}$ là đảm bảo điều kiện bền khi cột gạch chịu nén lệch tâm.

7.2.5. Lỗi mặt cắt

7.2.5.1. Khái niệm

Từ biểu thức (7-4) ta thấy đối với một mặt cắt đã cho thì i_y không đổi nên vị trí của trục trung hòa phụ thuộc vào tâm sai e . Tâm sai e càng nhỏ thì khoảng cách x_0 càng lớn và như vậy có thể trục trung hòa nằm ngoài mặt cắt và trên mặt cắt chỉ phát sinh một loại ứng suất mà thôi.

Cần chọn loại tâm sai e có thể nào để trên mặt cắt của thanh chịu nén lệch tâm chỉ có ứng suất nén. Vấn đề này rất quan trọng đối với một số kết cấu chịu nén lệch tâm làm bằng vật liệu giòn như gạch, đá, bê tông, gang... bởi vì vật liệu giòn có khả năng chịu kéo kém hơn khả năng chịu nén rất nhiều nên để tránh những bất trắc có thể xảy ra đối với kết cấu khi làm việc thì tốt hơn hết là định trị số tâm sai e sao cho trên mặt cắt không phát sinh ứng suất kéo. Chúng ta có thể giới hạn được vị trí của điểm đặt lực P trong một khu vực nào đó của mặt cắt để trên mặt cắt đó chỉ phát sinh ứng suất nén. Khu vực đó gọi là *lỗi mặt cắt*.

Cách vẽ lỗi mặt cắt như sau: cho trục trung hòa tiếp xúc với chu vi của mặt cắt, sao cho toàn bộ mặt cắt nằm ở một bên trục trung hòa, từ đó xác định được khoảng cách x_0 hoặc y_0 từ trục trung hòa đến trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt. Sau đó dựa vào công thức (7-4) ta xác định được độ lệch tâm e của điểm đặt lực, tức là xác định được một điểm trên chu vi lỗi mặt cắt:

$$e = \frac{i_y^2}{x_0}, \text{ hoặc } e = \frac{i_x^2}{y_0}$$

Lại cho trục trung hòa tiếp xúc với chu vi lõi ở những vị trí khác ta sẽ tìm được nhiều điểm trên chu vi lõi. Nối các điểm đó lại ta được lõi mặt cắt. Nếu mặt cắt có dạng là một hình đa giác lõi hoặc lõm thì lõi mặt cắt có dạng là một hình đa giác.

Sau đây ta nghiên cứu cách vẽ lõi cho hai mặt cắt đơn giản và thường gặp nhất là mặt cắt hình tròn và hình chữ nhật.

7.2.5.2. Lõi của mặt cắt hình tròn

Ta xét mặt cắt hình tròn như hình vẽ 7.5. Để trên mặt cắt không có ứng suất kéo thì trục trung hòa phải tiếp tuyến với đường tròn, nghĩa là lấy

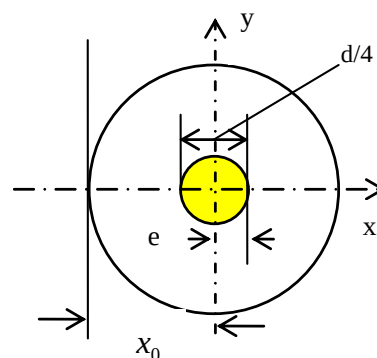
$$x_0 = r = \frac{d}{2}$$

Mặt khác phương trình của đường trung hòa là

$$x_0 = \frac{i_y^2}{e};$$

$$\text{mà: } i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{\pi d^2}{4} = \frac{d^2}{16}$$

$$\text{Nên suy ra: } e = \frac{i_y^2}{x_0} = \frac{d^2}{16} : \frac{d}{2} = \frac{d}{8}$$



Hình 7.5

Từ tâm O của mặt cắt nếu ta vẽ một đường tròn có bán kính tâm sai $e = d/8$ thì đường tròn đó là chu vi của lõi mặt cắt hình tròn. Nếu lực nén P đặt ở bất kỳ điểm nào trong lõi mặt cắt thì trên mặt cắt chỉ phát sinh một loại ứng suất nén mà thôi.

Ví dụ 7.4

Một cột mặt cắt hình tròn đường kính $d = 0,4$ m, chịu nén lệch tâm có khoảng cách lệch tâm $e = 0,04$ m. Hỏi trong mặt cắt có ứng suất kéo không ?

Bài giải

Vì $\frac{d}{8} = \frac{0,40}{8} = 0,05$ m nên $e = 0,04$ m $< \frac{d}{8} = 0,05$ m, nghĩa là lực nén tác dụng nằm trong lõi, do đó trên mặt cắt của cột không có ứng suất kéo.

7.2.5.3. Lõi của mặt cắt hình chữ nhật

Xét mặt cắt hình chữ nhật ABCD như hình vẽ 7.6.

Khi lực P đặt trên trục x và nằm phía bên phải trục y thì muốn trên mặt cắt không có ứng suất kéo, vị trí gần nhất của trục trung hòa phải trùng với cạnh AD. Do đó:

$$x_0 = \frac{h}{2}$$

$$\text{còn } i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12.b.h} = \frac{h^2}{12}$$

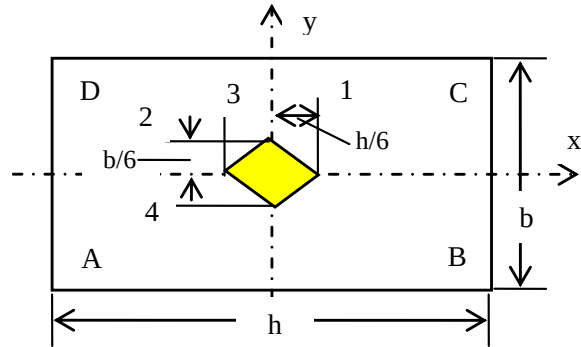
Từ phương trình $x_0 = \frac{i_y^2}{e}$ ta tính được $e = \frac{i_y^2}{x_0} = \frac{h}{6}$, nghĩa là điểm 1 là điểm ở mép lõi.

Khi lực P đặt trên trục x nằm về phía bên trái trục y thì do tính chất đối xứng ta được điểm đặt lực 3 cũng có tâm sai là $e = \frac{h}{6}$

Cũng lý luận như trên, khi lực P đặt trên trục y, ta được hai điểm 2 và 4 có: $e = \frac{b}{6}$

Bốn điểm 1, 2, 3, 4 trên hình vẽ 7.6 là bốn điểm nằm trên chu vi của lõi của mặt cắt hình chữ nhật.

Người ta đã chứng minh được rằng lõi của mặt cắt hình chữ nhật chính là hình thoi 1234 trên, đồng tâm với hình chữ nhật và mỗi đường chéo thì song song và bằng $\frac{1}{3}$ mỗi cạnh hình chữ nhật.

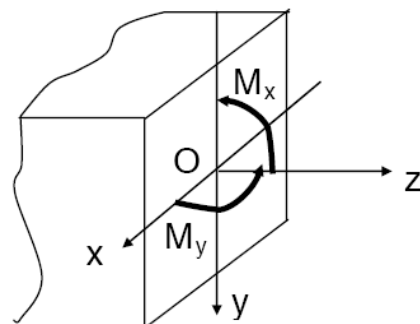


Hình 7.6

7.3. KHÁI QUÁT VỀ BÀI TOÁN KIỂM TRA BỀN CỦA CÁC THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP KHÁC

7.3.1. Uốn xiên

Khi thanh có mặt cắt hình chữ nhật chịu lực tác dụng thẳng góc với trục của thanh nhưng không trùng với một trục đối xứng của mặt cắt thì không còn hiện tượng uốn phẳng, mà gọi là uốn xiên. Khi đó, mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có hai thành phần nội lực là mômen uốn M_x và M_y tác dụng trong các mặt phẳng yOz , xOz (hình vẽ 7.7)



Hình 7.7

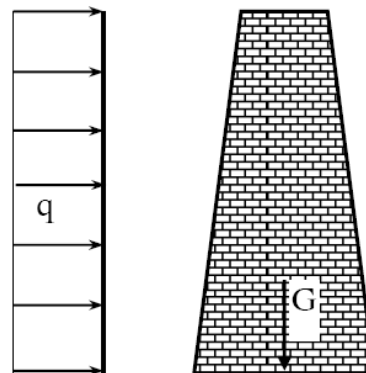
Tương tự như bài toán thanh chịu nén lệch tâm, ta có bài toán kiểm tra bền của thanh chịu uốn xiên. Trước hết kiểm tra cường độ, phải tìm mặt cắt nguy hiểm. Trong mặt cắt nguy hiểm, điều kiện cường độ sẽ là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (7-7)$$

Trong uốn xiên ta cũng gặp ba bài toán cơ bản kiểm tra bền. Đặc biệt với bài toán thiết kế mặt cắt ta không thể giải ngay được vì có hai số hạng chưa biết là W_x và W_y . Để giải bài toán này thường phải chọn trước tỷ số $\frac{W_x}{W_y}$ phù hợp với từng loại mặt cắt. Với mặt cắt hình chữ nhật thường chọn tỷ số này từ 1,5 đến 2, với thép hình chữ I từ 8,5 đến 10, với thép hình [từ 6 đến 8.

7.3.2. Uốn phẳng đồng thời kéo (hoặc nén)

Khi một thanh chịu tác dụng của hai loại lực: lực phát sinh ra uốn phẳng và lực phát sinh ra kéo (hoặc nén) đúng tâm, hoặc chỉ chịu tác dụng của một lực nhưng có thể phân tích ra hai loại lực như trên thì ta nói là thanh vừa chịu uốn phẳng, vừa bị kéo (hoặc nén). Ví dụ một ống khói vừa chịu tác dụng của trọng lượng bản thân G , vừa chịu tác



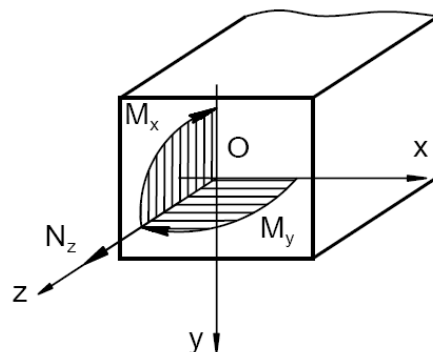
Hình 7.8

dụng uốn của tải trọng gió (hình 7.8)

Như vậy, bài toán thanh chịu nén lệch tâm chính là một trường hợp riêng của bài toán này.

Khi thanh chịu uốn phẳng và kéo (hoặc nén) trên mặt cắt ngang của thanh có các nội lực N_z , M_x , M_y (hình vẽ 7.9)

Tương tự như bài toán thanh chịu nén lệch tâm, ta có bài toán kiểm tra bền của thanh chịu uốn phẳng đồng thời chịu kéo (nén). Trước hết kiểm tra cường độ, phải tìm mặt cắt nguy hiểm. Trong mặt cắt nguy hiểm, tính $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$



Hình 7.9

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \text{ và } \sigma_{\min} = \pm \frac{N}{F} - \frac{M_{\max}}{W} \quad (7-8)$$

Dựa vào (7-8) có thể lập các điều kiện cường độ cho kiểm tra bền sau:

a) Khi kéo và uốn

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]_k \quad (7-9)$$

b) Khi nén và uốn: Ứng suất có trị số tuyệt đối lớn nhất là ứng suất nén $\sigma_{\min}$ trong (7-8). Ở đây chia ra 2 trường hợp:

- Vật liệu có $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ (như thép)

$$|\sigma_{\min}| = \left| -\frac{N}{F} - \frac{M_{\max}}{W} \right| \leq [\sigma]_n$$

Hoặc nếu không chú ý tới dấu và không phân biệt $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ thì chúng ta cũng được một công thức tương tự như công thức 7-9:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \quad (7-10)$$

- Vật liệu có $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ (ví dụ gang):

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]_k \text{ và } \sigma_{\min} = \left| -\frac{N}{F} - \frac{M_{\max}}{W} \right| \leq [\sigma]_n \quad (7-11)$$

Ở đây ta cũng có ba bài toán: kiểm tra cường độ, tìm lực tối đa cho phép và thiết kế kích thước mặt cắt. Đặc biệt với bài toán thiết kế kích thước mặt cắt ta phải dùng phương pháp đúng dần. Muốn vậy trước hết phải thiết kế thanh theo điều kiện cường độ hoặc về kéo (nén) đúng tâm, hoặc về uốn phẳng, sau đó kiểm tra lại mặt cắt vừa chọn theo điều kiện cường độ về kéo (nén) cộng uốn. Nếu không thỏa mãn thì phải thay đổi kích thước mặt cắt cho đến khi thỏa mãn.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Nêu những ví dụ thực tế về các thanh chịu lực phức tạp.
2. Trình bày nguyên lý dùng để tính nội lực và ứng suất trong thanh chịu lực phức tạp.
3. Thế nào là nén lệch tâm ? Cho ví dụ minh họa.
4. Viết và giải thích công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt hình chữ nhật, cách trục Oy một đoạn x cho một lực đặt lệch tâm trên trục Ox, cách tâm một đoạn e.
5. Viết và giải thích các công thức tính ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất trong thanh mặt cắt chữ nhật chịu nén lệch tâm.
6. Thế nào là một đường trung hòa?
7. Viết và giải thích các điều kiện kiểm tra bền về ứng suất pháp của thanh chịu nén lệch tâm.
8. Nêu khái niệm về lõi mặt cắt. Tại sao cần tìm lõi của mặt cắt?
9. Thế nào là uốn xiên? Viết và giải thích điều kiện cường độ của thanh chịu uốn xiên có mặt cắt hình chữ nhật.

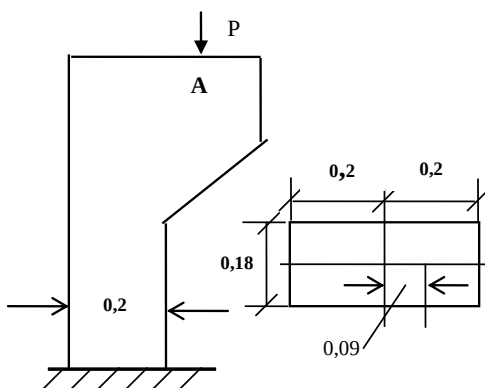
10. Thế nào là thanh chịu vừa uốn vừa kéo hay nén đồng thời? Tại sao nói, trường hợp thanh chịu nén lệch tâm là một trường hợp riêng của hiện tượng thanh vừa chịu kéo (nén) vừa chịu uốn ?
11. Viết và giải thích công thức tính ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất của thanh chịu uốn đồng thời chịu kéo hay nén.

BÀI TẬP

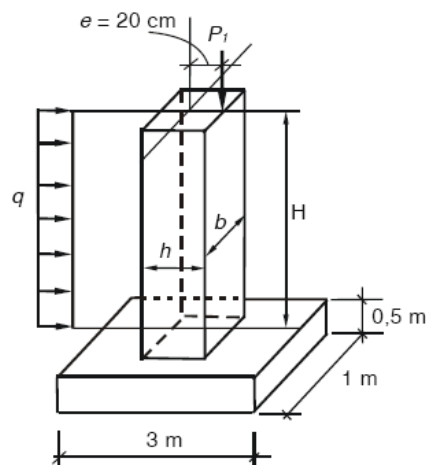
1. Một cột bê tông mặt cắt phía dưới là một hình chữ nhật kích thước $(0,18 \times 0,20)$ m². Cột chịu một lực nén lệch tâm $P = 6000$ N như hình vẽ 7.10. Kiểm tra cường độ của cột, biết ứng suất cho phép của bê tông là: $[\sigma]_k = 6.105$ N/m²; $[\sigma]_n = 7106$ N/m². Bỏ qua trọng lượng của cột.

2. Một cột chịu nén lệch tâm và lực đẩy của gió như hình 7.11, xem như chân cột bị ngàm.

Tính ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất tại chân cột. Biết $P_1 = 50$ kN; $q = 4$ kN/m; $H = 6$ m; $h = 2b = 40$ cm; Không tính trọng lượng bản thân cột.



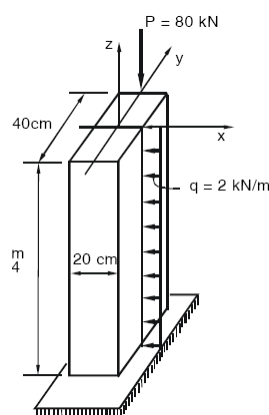
Hình 7.10



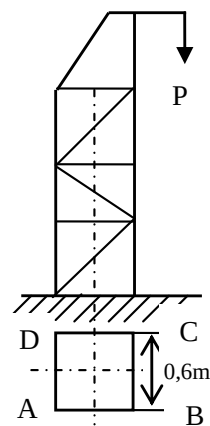
Hình 7.11

3. Xác định ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất tại vị trí nguy hiểm chân cột cho như hình vẽ 7.12. Các số liệu cho trên hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng bản thân cột.

4. Một cột điện hợp bởi 4 thanh thép góc L63.63.6 ở 4 cạnh (hình 7.13), mặt cắt ở đế làm thành một cột hình vuông cạnh là 0,6 m. Trọng lượng của toàn cột là $G = 0,8 \cdot 10^4$ N coi như tác dụng vào đúng trọng tâm đế. Trọng lượng do dây điện tác dụng vào cột bằng $P = 2 \cdot 10^4$ N đặt cách tâm một khoảng $e = 1,2$ m.



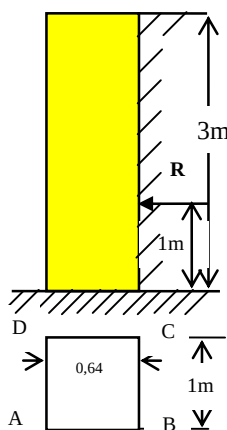
Hình 7.12



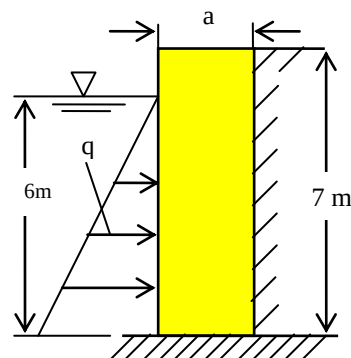
Hình 7.13

Tính ứng suất lớn nhất (điểm A và D) và nhỏ nhất (điểm B và C) phát sinh ra ở mặt cắt chân cột.

5. Kiểm tra cường độ của một tường chắn đất xây bằng gạch chiều cao $H = 3$ m, chiều dày 0,64 m. Mỗi mét chiều dài của tường chịu một áp lực đẩy của đất $R = 10^4$ N đặt ở $1/3$ chiều cao tường kể từ mặt đất lên. Một mét khối tường nặng $1,6 \cdot 10^4$ N và ứng suất cho phép của tường gạch là : $[\sigma]_n = 10^6$ N/m²; $[\sigma]_k = 10^5$ N/m² (hình 7.14)



Hình 7.14



Hình 7.15

6. Một đập nước bằng bê tông có chiều cao là 7 m và chiều dày a. Trọng lượng của 1 m³ bê tông là $2 \cdot 10^4$ N. Chiều cao của mức nước là 6 m. Biết quy luật phân bố áp lực của nước theo hình tam giác. Tính bề dày a tối thiểu để trong đập bê tông không phát sinh ra ứng suất kéo.

HẾT CHƯƠNG 7

Phần 3. CƠ HỌC KẾT CẤU

Cơ học kết cấu là một môn học độc lập, có đối tượng nghiên cứu là vật rắn biến dạng đàn hồi, tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài. Phạm vi nghiên cứu của môn học là giống môn Sức bền vật liệu ở Phần thứ hai, nhưng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau. Do vậy, trong kết cấu hay dùng tên gọi là hệ kết cấu. Nhiệm vụ của môn học là đi xác định nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình nhằm xây dựng công trình thỏa mãn các yêu cầu:

- *Điều kiện về độ bền*: Đảm bảo cho công trình không bị phá hoại dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

- *Điều kiện về độ cứng*: Đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và biến dạng vượt quá giới hạn cho phép nhằm đảm bảo sự làm việc bình thường của công trình.

- *Điều kiện về ổn định*: Đảm bảo cho công trình có khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của nó dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Với yêu cầu độ bền cần đi xác định nội lực; với yêu cầu độ cứng, cần đi xác định chuyển vị; với yêu cầu về ổn định, cần đi xác định lực tới hạn mà kết cấu có thể chịu được.

Do bị giới hạn bởi chương trình đào tạo, giáo trình này chỉ giới thiệu môn học này một chương, gồm một số nội dung phần kết cấu siêu tĩnh, và cũng chỉ giới thiệu kỹ một phương pháp đơn giản trong tính toán hai loại kết cấu siêu tĩnh (dầm liên tục và khung cứng siêu tĩnh) là phương pháp tra bảng. Các nội dung và phương pháp tính toán đầy đủ của môn học này sẽ được giới thiệu ở chương trình đào tạo cao đẳng và đại học, khối ngành xây dựng.

Chương 8. KẾT CẤU SIÊU TĨNH

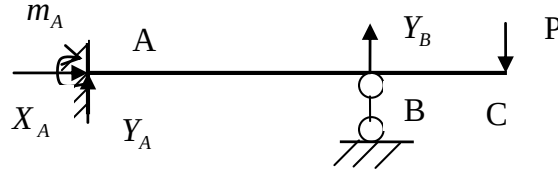
8.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH

8.1.1. Khái niệm

Hệ siêu tĩnh là những hệ mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ. Nói cách khác, nó là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.

Ví dụ, xét trên hình 8.1 cho một hệ gồm thanh ngàm tại đầu A, liên kết gối tựa tại B, và chịu lực tác dụng P.

- Nếu xét riêng phần BC, hệ là tĩnh định vì có thể xác định được ngay nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

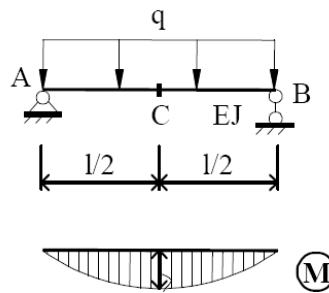


Hình 8.1

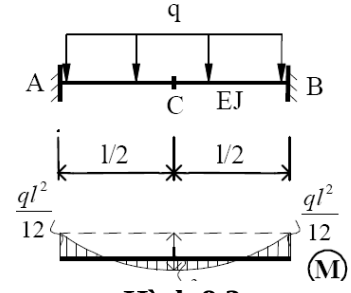
- Phần hệ AB chưa thể xác định được phản lực chỉ bằng các phương trình cân bằng tĩnh học (4 phản lực: X_A , Y_A , m_A , Y_B , nhưng chỉ có 3 phương trình) nên cũng chưa thể xác định được nội lực. Vậy theo định nghĩa, hệ đã cho là hệ siêu tĩnh.

8.1.2. Đặc điểm

- Nội lực, biến dạng và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nói chung là nhỏ hơn so với hệ tĩnh định có cùng kích thước và tải trọng tác dụng. Ví dụ ở hình 8.2, hệ tĩnh định chịu lực phân bố q , có



Hình 8.2



Hình 8.3

các trị số: $y_{\max} = y_C = \frac{5ql^4}{384EJ}$, $|M|_{\max} = \frac{ql^2}{8}$. Còn ở hình 8.3 hệ siêu tĩnh chịu lực như hệ tĩnh định nhưng phản lực và nội lực như sau:

$$y_{\max} = y_C = \frac{1ql^4}{384EJ}, \quad |M|_{\max} = \frac{ql^2}{12}.$$

- Trong hệ siêu tĩnh có xuất hiện nội lực do các nguyên nhân biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và do chế tạo, lắp ráp không chính xác gây ra.

Về biến thiên nhiệt độ, trong hệ tĩnh định các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực, còn trong hệ siêu tĩnh thì các liên kết ngăn cản biến dạng của dầm nên làm xuất hiện phản lực và nội lực.

Về chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa, trong hệ tĩnh định các liên kết không ngăn cản chuyển vị tại gối tựa nên dầm chỉ bị nghiêng đi mà không biến dạng nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực. Trong hệ siêu tĩnh ngược lại, các liên kết có xu hướng ngăn cản chuyển vị làm dầm bị uốn cong, xuất hiện phản lực và nội lực.

Về lắp ráp, chế tạo không chính xác, ví dụ một dầm tĩnh định AB nào đó nếu được ráp thêm cạnh CD ở giữa sẽ trở thành hệ siêu tĩnh. Nếu thanh CD do chế tạo hụt một đoạn Δ thì khi ráp vào, nó sẽ bị kéo dãn ra đồng thời dầm AB sẽ bị uốn cong nên sẽ phát sinh phản lực và nội lực trong hệ.

- Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào độ cứng của các cấu kiện trong hệ (EJ, EF, GF...)

Tóm lại, hệ siêu tĩnh chịu lực tốt hơn hệ tĩnh định.

8.1.3. Bậc siêu tĩnh

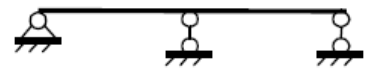
Bậc siêu tĩnh là số các liên kết thừa tương đương với liên kết loại 1 ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình. Ký hiệu là n .

Cách xác định: Bậc siêu tĩnh của dầm liên tục được xác định bằng số liên kết đơn thừa. Chúng ta nhận xét rằng một dầm tĩnh định chỉ cần nối với đất bằng 3 liên kết đơn sắp xếp hợp lý, nên ta có thể tính bậc siêu tĩnh của dầm liên tục theo công thức: $n = C_0 - 3$, trong đó, n là bậc siêu tĩnh của dầm liên tục; C_0 là số liên kết đơn. Ví dụ dầm cho ở hình 8.4, $C_0 = 4$, do đó bậc siêu tĩnh của hệ là $n = 4 - 3 = 1$.

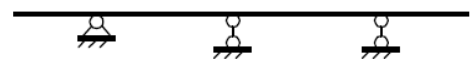
8.2. DẦM LIÊN TỤC

8.2.1. Khái niệm

Dầm liên tục là một hệ gồm một thanh thẳng nối với trái đất bằng số gối tựa lớn hơn hai để tạo thành một hệ bất biến hình. Hay dầm liên tục là dầm đặt trên nhiều gối tựa sao cho có số nhịp lớn hơn một.



Hình 8.4

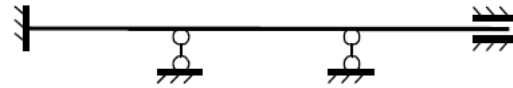


Hình 8.5

8.2.2. Phân loại

Thường được phân ra 3 loại:

- Dầm liên tục hai đầu khớp (hình 8.4), sẽ có mômen hai đầu bằng không ($M_A=M_C=0$)
- Dầm liên tục có đầu thừa (nhô ra) (hình 8.5)
- Dầm liên tục có đầu ngàm



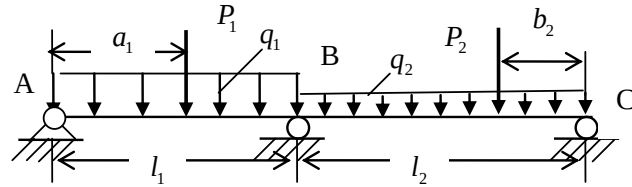
Hình 8.6

(hình 8.6)

8.2.3. Vẽ biểu đồ nội lực theo phương pháp phương trình 3 mômen

8.2.3.1. Phương trình ba mômen

Định lý ba mômen giới thiệu về quan hệ giữa các mômen bên trong tại tiết diện trên ba giá đỡ nối tiếp với nhau trong một dầm liên tục. Quan hệ này được biểu thị thành một phương trình với số hạng của ba mômen. Ta có thể viết những phương trình ba mômen đối với những mômen trong bất cứ giá đỡ nối tiếp nào. Bằng cách này ta sẽ có đủ những phương trình để giải được những mômen bên trong tại tất cả các giá đỡ. Sau khi xác định được những mômen tại các giá đỡ rồi, thì ta có thể xác định được các phản lực thẳng đứng tại tất cả các giá đỡ từ những điều kiện cân bằng tĩnh. Sau đó ta vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen theo cách thức thông thường. Lưu ý rằng, phương trình chỉ đúng với điều kiện dầm có độ cứng chống uốn ($EJ = \text{const}$). Ví dụ trường hợp hình 8.7.



Hình 8.7

Dầm chịu tải trọng tập trung P_1, P_2 , tải trọng phân bố q_1, q_2 , tựa trên 3 gối A, B, C liên tiếp, có khoảng cách như hình vẽ. Người ta đã thiết lập được phương trình 3 mômen sau:

$$\begin{aligned}
 M_A \cdot l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C \cdot l_2 = \\
 = - \frac{q_1 l_1^3}{4} - \frac{q_2 l_2^3}{4} - \frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} - \frac{P_2 b_2 (l_2^2 - b_2^2)}{l_2}
 \end{aligned}
 \quad (8-1)$$

Ta có thể ứng dụng phương trình ba mômen vào bất cứ dầm liên tục nào có nhiều nhịp.

8.2.3.2. Cách giải phương trình ba mômen

a) Loại 1: Hai đầu dầm đơn giản, hai đầu khớp ($M_A = M_C = 0$) (hình 8.4):

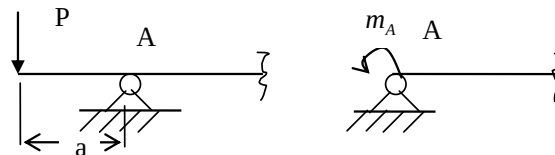
- Thay vào (8-1) giải ra M_B .
- Dùng mặt cắt tách ra hai nhịp riêng tại B, sau đó giải như hệ tĩnh định ra R_{B1} , R_{B2} .
- Cộng lại: $R_B = R_{B1} + R_{B2}$, ta được phản lực tại gối giữa B.
- Có R_B , bài toán trở về hệ tĩnh định, tiến hành vẽ biểu đồ mômen và lực cắt bình thường.

b) Loại 2 (dầm có đầu nhô ra) (hình 8.8)

- Bỏ đoạn nhô ra, thay bằng mômen tại đầu A.

Ví dụ hình vẽ 8.8 là $m_A = -P.a$

- Sau đó giải như bài toán loại 1.

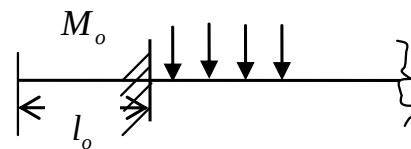


Hình 8.8

c) Loại 3 (ngàm một hay hai đầu)

(hình 8.9)

- Thêm một đoạn (một nhịp) vào hỗ trợ có chiều dài bằng không ($l_o = 0$), từ đó ta tạo ra một phương trình ba mômen mới tại chỗ giá đỡ cố định (viết phương trình ba mômen cho hai nhịp 1 và nhịp phụ), giải được M_A và M_B .

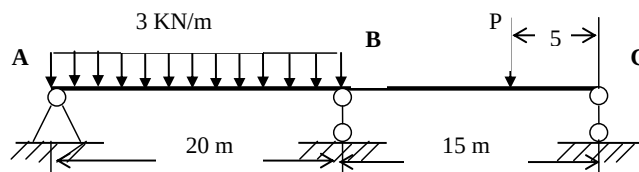


Hình 8.9

8.2.3.3. Các ví dụ

Ví dụ 8.1

Cho một dầm ABC, chịu lực như hình vẽ 8.10, có $EJ = \text{const}$, $q = 3 \text{ kN/m}$, $P = 25 \text{ kN}$. Tìm phản lực tại B.



Hình 8.10

Bài giải

Dầm thuộc loại 1, có $M_A = M_C = 0$

Thay vào phương trình 8.1 ta có:

$$0 + 2 M_B (20+15) + 0 = - \frac{3 \cdot 20^3}{4} - \frac{(25 \cdot 5)(15^2 - 5^2)}{15} . \text{ Suy ra: } M_B = - 110 \text{ kNm}$$

Tách dầm ra 2 nhịp tĩnh định (hình 8.11)

Nội lực M tại B trở thành ngoại lực của hai phần dầm.

Xét nhịp 1 (bên trái):

$$\sum m_B(\vec{F}) = - R_A \cdot 20 + 3 \cdot 20 \cdot 10 - 110 = 0 . \text{ Giải ra ta có } R_A = 24,5 \text{ kN}$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = R_{B1} \cdot 20 - 30 \cdot 20 \cdot 10 - 110 = 0 . \text{ Giải ra ta có } R_{B1} = 35,5 \text{ kN}.$$

Xét nhịp 2 (bên phải).

$$\sum m_B(\vec{F}) = R_C \cdot 15 - 25 \cdot 10 + 110 = 0 . \text{ Giải ra ta có: } R_C = 9,3 \text{ kN}$$

$$\sum m_C(\vec{F}) = - R_{B2} \cdot 15 + 25 \cdot 5 + 110 = 0 . \text{ Giải ra ta có: } R_{B2} = 15,7 \text{ kN}$$

$$\text{Vậy, } R_B = R_{B1} + R_{B2} = 35,5 + 15,7 = 51,2 \text{ kN}$$

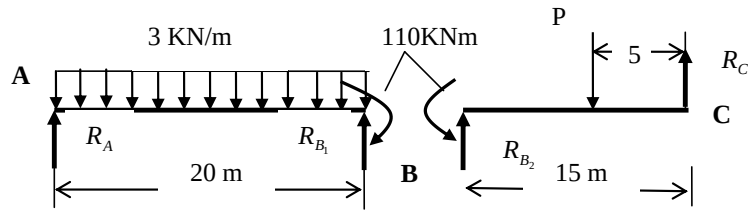
Ví dụ 8.2

Cho một dầm ABC, chịu lực như hình vẽ 8.12, có $EJ = \text{const}$, $q = 5 \text{ kN/m}$, $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 20 \text{ kN}$. Tìm phản lực tại B.

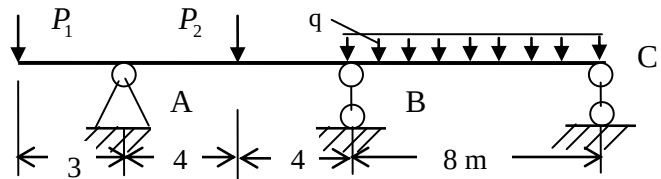
Bài giải

Dầm thuộc loại 2, đầu C có $M_C = 0$. Đầu A có đoạn nhô ra. Ta thay đoạn nhô ra bằng mômen $M_A = - P_1 \cdot 3 = - 10 \cdot 3 = - 30 \text{ kNm}$, dầm trở về loại 1. Thay vào phương trình 8.1 ta có:

$$\begin{aligned} & - 30 \cdot 8 + 2M_B (16) + 0 = \\ & = - \frac{5 \cdot 8^3}{4} - \frac{20 \cdot 4(8^2 - 4^2)}{8} \text{ Giải ra, } M_B = - 27,5 \text{ kNm. Tách dầm ra hai nhịp như ví dụ 8.1 ta có:} \end{aligned}$$



Hình 8.11



Hình 8.12

Nhịp 1: $\sum m_B(\vec{F}) = -R_A \cdot 8 + 10 \cdot 11 + 20 \cdot 4 - 27,5 = 0$. Giải ra ta có $R_A = 20,3 \text{ kN}$

$$\sum m_A(\vec{F}) = R_{B1} \cdot 8 + 10 \cdot 3 - 20 \cdot 4 - 27,5 = 0. \text{ Giải ra ta có } R_{B1} = 9,7 \text{ kN}$$

Nhịp 2: $\sum m_B(\vec{F}) = R_C \cdot 8 - 5 \cdot 8 \cdot 4 + 27,5 = 0$. Giải ra ta có: $R_C = 16,6 \text{ kN}$

$$\sum m_C(\vec{F}) = -R_{B2} \cdot 8 + 5 \cdot 8 \cdot 4 + 27,5 = 0. \text{ Giải ra ta có: } R_{B2} = 23,4 \text{ kN}$$

Suy ra $R_B = R_{B1} + R_{B2} = 9,7 + 23,4 = 33,1 \text{ kN}$

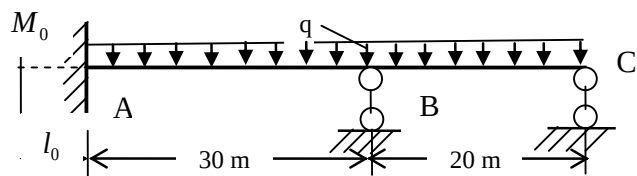
Ví dụ 8.3

Cho một dầm ABC, chịu lực như hình vẽ 8.13, có $EJ = \text{const}$, $q = 4 \text{ kN/m}$. Tìm phản lực tại B.

Bài giải

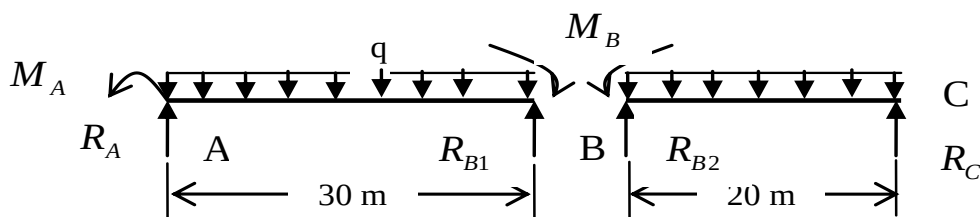
Dầm thuộc loại 3, có $M_C = 0$.

Ta đưa vào dầm một đoạn phụ (nhịp 0) ở đầu trái có $l_0 = 0$. Viết phương trình 8.1 cho nhịp 0 và nhịp 1 của dầm:



Hình 8.13

$$M_0(0) + 2M_A(0+30) + M_B(30) = -\frac{4(30)^3}{4}. \text{ Rút gọn, có } 60M_A + 30M_B = -27.000 (*)$$



Hình 8.14

Viết phương trình 8.1 cho 2 nhịp (nhịp 1 và 2) của dầm:

$$M_A(30) + 2M_B(30+20) + 0 = -\frac{4 \cdot 30^3}{4} - \frac{4 \cdot 20^3}{4}. \text{ Rút gọn, có:}$$

$$30M_A + 100M_B = -35.000 (**)$$

Giải hệ phương trình (*) và (**) ta có: $M_A = -324 \text{ kNm}$, $M_B = -253 \text{ kNm}$

Tách dầm ra hai nhịp riêng (hình 8.14)

Nhịp 1:

$$\sum m_B(\vec{F}) = -R_A \cdot 30 + 4 \cdot 30 \cdot 15 + 324 - 253 = 0. \text{ Giải ra ta có } R_A = 62,4 \text{ kN}$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = R_{B1} \cdot 30 - 4 \cdot 30 \cdot 15 + 324 - 253 = 0. \text{ Giải ra ta có } R_{B1} = 57,6 \text{ kN}$$

Nhịp 2:

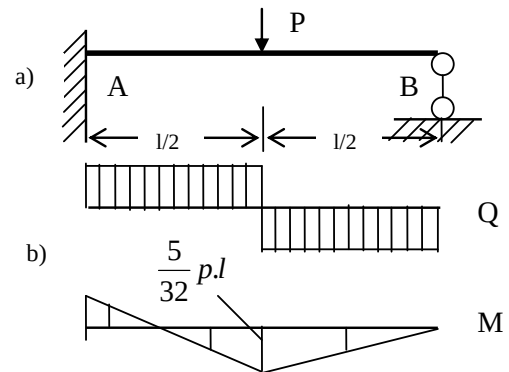
$$\sum m_B(\vec{F}) = R_C \cdot 20 - 4 \cdot 20 \cdot 10 + 253 = 0. \text{ Giải ra ta có: } R_C = 27,3 \text{ kN}$$

$$\sum m_C(\vec{F}) = -R_{B2} \cdot 20 + 4 \cdot 20 \cdot 10 + 253 = 0. \text{ Giải ra ta có: } R_{B2} = 52,6 \text{ kN}$$

$$\text{Suy ra } R_B = R_{B1} + R_{B2} = 57,6 + 52,6 = 110,2 \text{ kN}$$

8.2.4. Vẽ biểu đồ nội lực theo phương pháp tra bảng

Vẽ biểu đồ nội lực theo phương pháp tra bảng là chúng ta chỉ việc chọn sơ đồ tính của bài toán đúng với sơ đồ tính trong các bảng người ta đã tính sẵn, vẽ sẵn để tiện cho người sử dụng, trong đó có 4 cột: sơ đồ tải trọng, biểu đồ Q và M, trị số phản lực và trị số phản lực mômen. Phương pháp này rất tiện lợi, nhanh chóng và dễ dàng cho người sử dụng. Những bảng tra này có trong "Sổ tay kỹ thuật thủy lợi" tập 1, (*) của Bộ Thủy lợi trước đây tổ chức biên soạn, Nhà xuất bản Nông nghiệp phát hành 6/1979. Gần đây, những bảng tra này được tái bản trong "Sổ tay kỹ thuật thủy lợi", phần 1, tập 1 (**), do Viện Khoa học Thủy lợi, bộ Nông nghiệp và Phát triển nông thôn tổ chức biên tập, Nhà xuất bản Nông nghiệp phát hành Quý IV năm 2011. Các bảng tra này được giới thiệu tại mục lục số 2, 3, 4 của Giáo trình này. Dưới đây sẽ hướng dẫn cách tra một số loại dầm cụ thể.



Hình 8.15

1. Dầm siêu tĩnh một nhịp

Gặp loại dầm siêu tĩnh một nhịp, chỉ cần chọn Bảng 2-20, từ trang 184 – 193, sách (*) chỉ dẫn ở trên.; hoặc chọn *Bảng 2.5.3- Các phản lực trong dầm siêu tĩnh một nhịp*, từ trang 192 – 198, sách (**) đã dẫn; hoặc tra Phụ lục 2 giáo trình này, sau đó dựa vào sơ đồ chịu lực của bài toán đối chiếu với các sơ đồ chịu lực trong bảng tính,

vẽ sẵn, tra ra ngay trị số phản lực, trị số phản lực mômen, và biểu đồ nội lực mômen M và lực cắt Q.

Ví dụ 8.4

Giả sử ta có bài toán sơ đồ dầm chịu lực một đầu ngàm, một đầu khớp, chịu lực tác động P ở chính giữa dầm, như hình vẽ 8.15a.

Bài giải

Chúng ta sẽ tra Bảng 2.5.3 nói trên, ra kết quả biểu đồ Q và M như hình 8.15b. Các trị số phản lực tra được như sau:

Phản lực tại A : $A = \frac{11}{16}P$. Phản lực tại B: $B = \frac{5}{16}P$; Phản lực mômen:

$$M_A = -\frac{3}{16}Pl$$

Như vậy việc tính toán sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều.

Bây giờ ta thử kiểm tra lại theo phương pháp phương trình 3 mômen 8.1:

Đây là dầm loại 3, tương tự ví dụ 8.3, ta đưa vào đầu trái dầm đoạn phụ $l_0 = 0$, viết phương trình 8.1 cho đoạn 0 và đoạn 1, với $M_B = 0$:

$$M_0(0) + 2M_A(0+l) + 0 = -\frac{P \frac{l}{2}(l^2 - \frac{l^2}{4})}{l} ; M_A = -\frac{3}{16}Pl.$$

Có M_A ta lấy mômen với 2 đầu:

$$\sum m_B(\vec{F}) = m_A + p \frac{l}{2} - A.l = 0 . \text{ Giải ra ta có } A = \frac{11}{16}P$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = m_A - p \frac{l}{2} + B.l = 0 . \text{ Giải ra ta có } B = \frac{5}{16}P$$

Như vậy kết quả hoàn toàn khớp nhau, trong khi tra bảng nhanh và đơn giản hơn nhiều.

2. Dầm siêu tĩnh nhiều nhịp

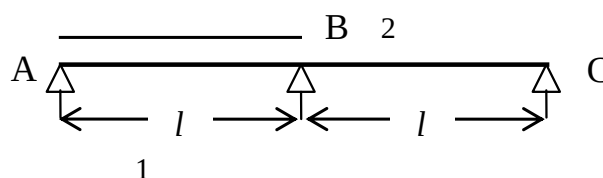
Với dầm siêu tĩnh nhiều nhịp ta xét từ 2-4 nhịp, có chiều dài nhịp như nhau. Trường hợp này chúng ta tra Bảng 2-21, trang 194-198, "Sổ tay kỹ thuật thủy lợi" ,

tập 1, sách (*) đã dẫn ở trên, hoặc Bảng 2.5.4, trang 199-208, "Sổ tay kỹ thuật thủy lợi", phần 1, tập 1, sách (**) đã dẫn; hoặc tra Phụ lục 3 của giáo trình này.

Phương pháp tra bảng là dựa vào sơ đồ chịu tải của bài toán đối chiếu với sơ đồ đã tính sẵn, vẽ sẵn trong bảng.

Ví dụ 8.5

Tra bảng mômen uốn, lực cắt và phản lực cho dầm liên tục hai nhịp dài như nhau chịu tải trọng theo sơ đồ ở hình vẽ 8.16



Hình 8.16

Bài giải

Ở đây, nhịp chịu tải là nhịp 1.

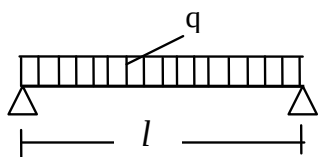
Ứng với sơ đồ chịu lực trên nhịp chịu tải, với ký hiệu các nội lực như sau: Chỉ số thứ nhất của mômen và lực cắt biểu thị tên nhịp. Chỉ số thứ hai của mômen, khi có lực tập trung chỉ vị trí của lực, khi có lực phân bố chỉ trị số mômen lớn nhất trong nhịp. Chỉ số thứ hai của lực cắt biểu thị tên gối tựa sát với tiết diện.

Các sơ đồ lực trên nhịp chịu tải cụ thể như sau:

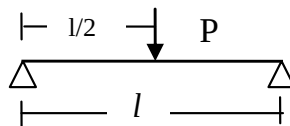
- Trường hợp lực phân bố trên toàn bộ nhịp 1 (hình vẽ 8.17), mômen uốn, lực cắt và phản lực như sau: $M_{11}(\max) = 0,096 ql^2$; $M_B = - 0,063 ql^2$; $A = Q_{1A} (\max) = 0,438 ql$.

- Trường hợp lực tập trung chia đôi nhịp 1 (hình vẽ 8.18), mômen uốn, lực cắt và phản lực như sau: $M_{11}(\max) = 0,203 Pl$; $M_B = - 0,094 Pl$; $A = Q_{1A} (\max) = 0,406 P$.

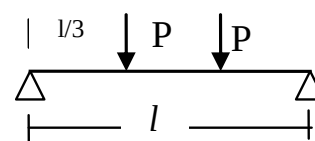
- Trường hợp lực tập trung chia nhịp 1 ra 3 phần bằng nhau (hình vẽ 8.19), mômen uốn, lực cắt và phản lực như sau: $M_{11}(\max) = 0,278 Pl$; $M_{12} (\max) = 0,222 Pl$; $M_B = - 0,167 Pl$; $A = Q_{1A} (\max) = 0,833 P$.



Hình 8.17



Hình 8.18

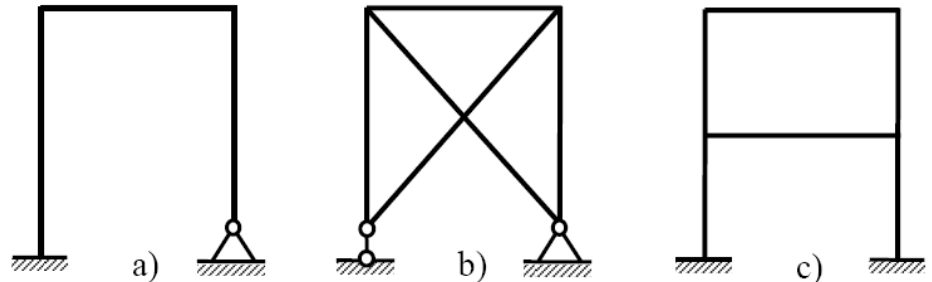


Hình 8.19

8.2. KHUNG CỨNG SIÊU TĨNH

8.3.1. Khái niệm

Khung là hệ gồm các thanh được nối cứng với nhau ở đầu thanh (gọi là nút khung). Khung có thể có nhiều nhịp hoặc nhiều tầng, có thể tĩnh định hoặc siêu tĩnh.



Hình 8.20

Ở đây chỉ giới hạn xét khung một nhịp, một tầng, liên kết gối và liên kết ngàm như hình vẽ 8.20 thể hiện.

8.3.2. Vẽ biểu đồ nội lực theo phương pháp tra bảng

Là phương pháp so giữa sơ đồ chịu lực của bài toán cần giải với sơ đồ tải

Sơ đồ tải trọng và biểu đồ mô men uốn	Các mô men uốn và phản lực
1	2
1. Khung một nhịp có các cột liên kết tựa khớp cố định	
	$k = \frac{J_2 h}{J_1 \ell}$ $M_B = M_C = \frac{3}{2} \frac{Pab}{\ell(3+2k)}$ $H = \frac{3}{2} \frac{Pab}{h\ell(3+2k)}$

Hình 8.21

trọng của khung đã tính và vẽ sẵn trong bảng tra để tính toán kết quả nội lực.

Phương pháp cho phép xác định biểu đồ nội lực của khung siêu tĩnh hết sức nhanh chóng, tiện lợi và chính xác, rất thích hợp trong thực tế tính toán thiết kế. Gặp bài toán này, chúng ta chỉ cần tra tại Bảng 2-26: "Mômen uốn và phản lực trong một

số khung”, trang 220-236, ”Sổ tay kỹ thuật thủy lợi” , tập 1, sách (*) đã dẫn; hoặc tra tại ”Bảng 2.5.8: Mômen uốn và phản lực trong một số kết cấu”, trang 217-221, ”Sổ tay kỹ thuật thủy lợi”, phần 1, tập 1, sách (**) đã dẫn. Hoặc chúng ta tra tại Phụ lục 4 giáo trình này.

Hình 8.21 là trích một sơ đồ tải trọng và biểu đồ mômen uốn vẽ sẵn (cột 1) và công thức tính sẵn trị số mômen uốn và phản lực (cột 2), ta chỉ thay số vào là tính ra được các trị số và vẽ được biểu đồ chính xác của bài toán.

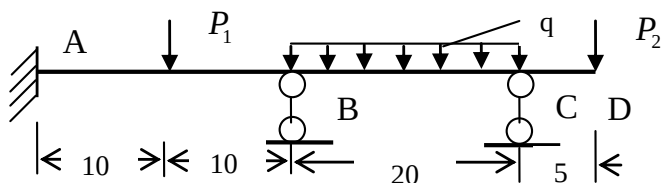
CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Hệ siêu tĩnh là gì ? Nêu một ví dụ về hệ siêu tĩnh.
2. Trình bày các đặc điểm của hệ siêu tĩnh.
3. Bậc siêu tĩnh là gì ? Cách xác định bậc siêu tĩnh.
4. Thê nào gọi là dầm liên tục ? Nêu cách phân loại dầm liên tục.
5. Viết phương trình ba mômen và giải thích các thành phần của phương trình.
6. Nêu cách giải phương trình ba mômen.
7. Vẽ biểu đồ theo phương pháp tra bảng gồm những nội dung gì ?

BÀI TẬP

1. (Hình 8.22)

Cho dầm ABCD chịu tải trọng như hình vẽ. Biết độ cứng chống uốn EJ của dầm không đổi. Các lực có trị số như sau: $P_1 = 12 \text{ kN}$, $P_2 = 6 \text{ kN}$, $q = 1,5 \text{ kN/m}$; độ dài các đoạn dầm cho trên hình vẽ tính bằng m.

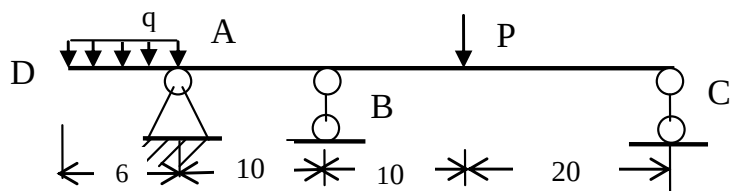


Hình 8.22

Xác định các phản lực tại A, B, C của dầm.

2. (Hình 8.23)

Cho dầm ABCD chịu tải trọng như hình vẽ. Biết độ cứng chống uốn EJ của dầm không đổi. Các lực có trị số như sau: $P = 8 \text{ kN}$, $q = 2 \text{ kN/m}$; độ dài các đoạn dầm cho trên hình vẽ tính bằng m.



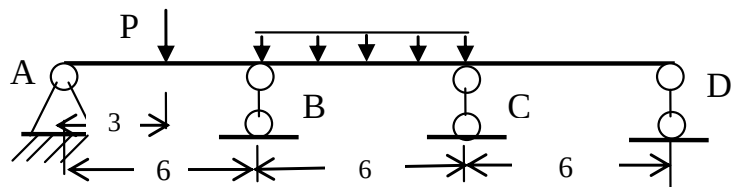
Hình 8.23

Xác định các phản lực tại A, B, C của dầm.

3. (Hình 8.24)

Cho dầm ABCD chịu tải trọng như hình vẽ. Biết độ cứng chống uốn EJ của dầm không đổi. Các lực có trị số như sau: $P = 40 \text{ kN}$, $q = 20 \text{ kN/m}$; độ dài các đoạn dầm cho trên hình vẽ tính bằng m.

Xác định các phản lực tại A, B, C của dầm.

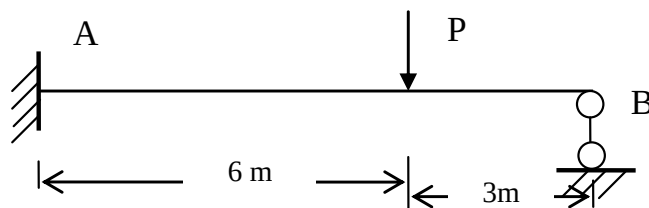


Hình 8.24

4. (Hình 8.25)

Cho sơ đồ dầm chịu tải trọng như hình vẽ. Biết $P = 20 \text{ kN}$.

Dùng phương pháp tra bảng, hãy xác định các trị số phản lực tại A, B và vẽ biểu đồ Q và M cho dầm.



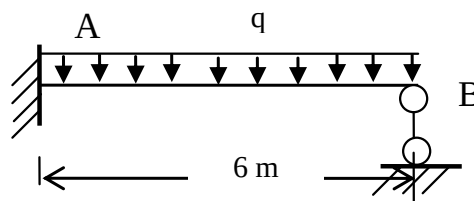
Hình 8.25

5.

(Hình 8.26)

Cho sơ đồ dầm chịu tải trọng như hình vẽ. Biết $q = 10 \text{ kN/m}$.

Dùng phương pháp tra bảng, hãy xác định các trị số phản lực tại A, B và vẽ biểu đồ Q và M cho dầm.

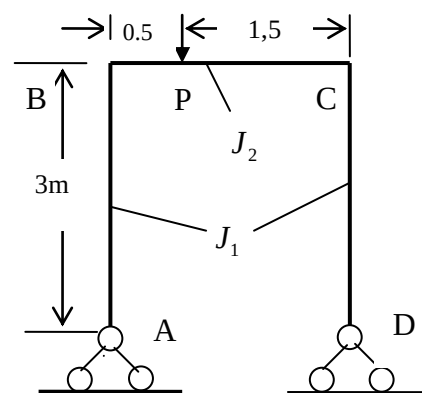


Hình 8.26

6. (Hình 8.27)

Cho sơ đồ khung một nhịp, có các cột liên kết tựa khớp cố định, chịu tải trọng như hình vẽ. Biết $P = 10 \text{ kN}$, khoảng cách cho trên hình vẽ tính bằng m;

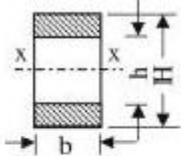
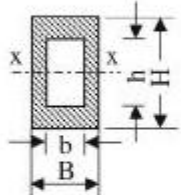
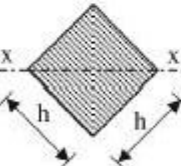
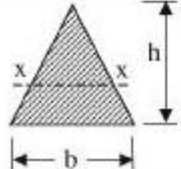
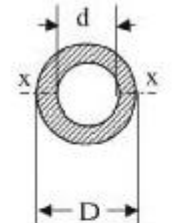
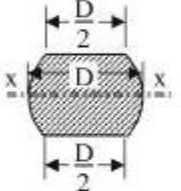
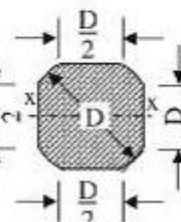
Dùng phương pháp tra bảng, hãy xác định các trị số phản lực tại A, B, C, D và vẽ biểu đồ M cho khung.



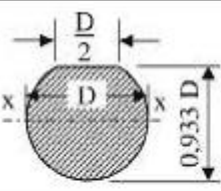
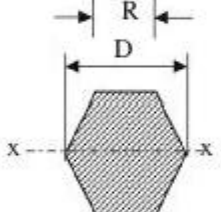
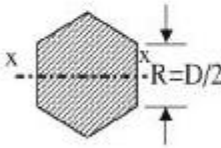
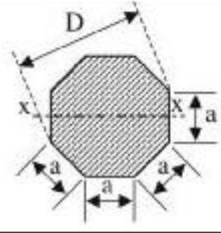
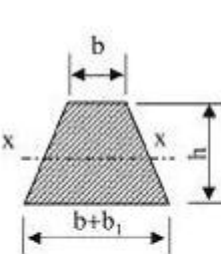
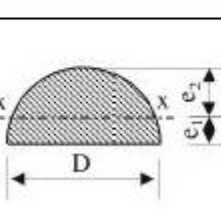
Hình 8.27

HẾT CHƯƠNG 8

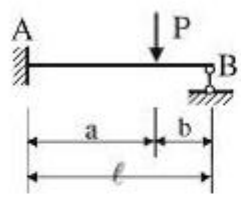
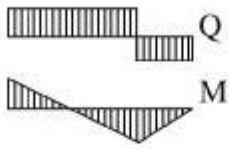
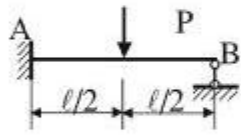
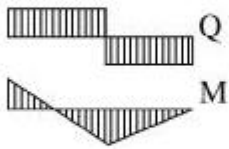
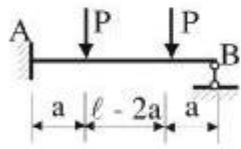
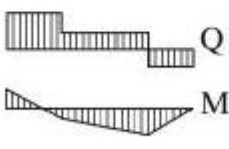
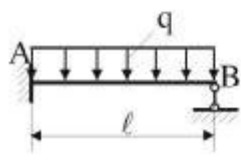
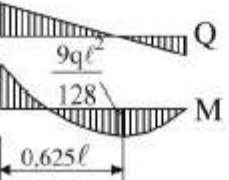
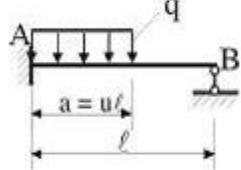
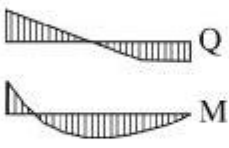
Phụ lục số 1. Các đặc trưng hình học của một số hình phẳng

Mặt cắt	Mô men quán tính J_x	Mô đun chống uốn W_x	Diện tích mặt cắt F	Bán kính quán tính i_x
	$\frac{b(H^3 - h^3)}{12}$	$\frac{b(H^3 - h^3)}{6H}$	$b(H - h)$	$\sqrt{\frac{H^3 - h^3}{12(H - h)}}$
	$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$BH - bh$	$\sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$
	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^3}{6\sqrt{2}} = 0,1179h^3$	h^2	$0,289 h$
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{h}{\sqrt{18}} = 0,236h$
	$\frac{p(D^4 - d^4)}{64}$	$\frac{p(D^4 - d^4)}{32D}$	$\frac{p(D^2 - d^2)}{4}$	$\sqrt{\frac{D^2 + d^2}{16}}$
	$0,039 D^4$	$0,088 D^3$	$0,40 D^2$	$0,230 D$
	$0,038 D^4$	$0,087 D^3$	$0,693 D^2$	$0,235 D$

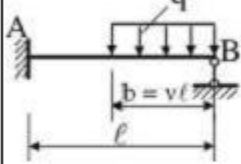
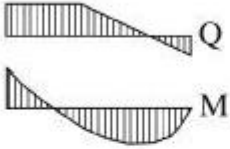
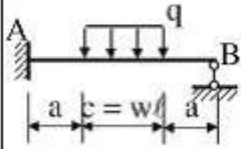
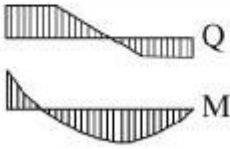
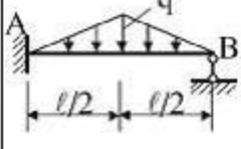
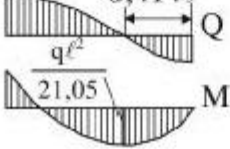
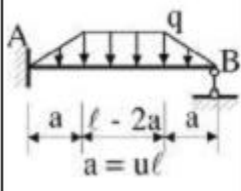
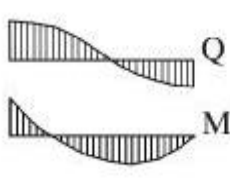
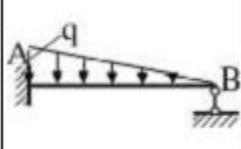
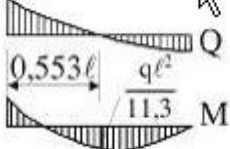
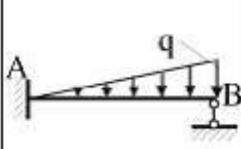
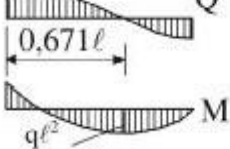
Phụ lục số 1 (tiếp theo)

Mặt cắt	Mô men quán tính J_x	Mô đun chống uốn W_x	Diện tích mặt cắt F	Bán kính quán tính i_x
	$0,044 D^4$	$0,092 D^3$	$0,763 D^2$	$0,240 D$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$	$\frac{5}{8} R^3$	$0,6945 D^2$	$0,456 R$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$	$0,5413 R^3$	$0,6945 D^2$	$0,456 R$
	$\frac{1+2\sqrt{2}}{6} R^4 = 0,6381 R^4$	$0,6906 R^3$	$0,707 D^2$	$0,475 R$
	$\frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3$ $\left(e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h \right)$	$\frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^2$	$(b + 0,5b_1) h$	$\frac{h}{6(2b + b_1)} \times \sqrt{2(6bb_1 + 6b^2 + b_1^2)}$
	$\frac{D^4}{16} \left(\frac{p}{8} - \frac{8}{9p} \right) = 0,00687 D^4$ ($e_1 = 0,21221 D$)	$W_1 = 0,03234 i D^3$ $W_2 = 0,02385 i D^3$	$\frac{\pi D^2}{8}$	$0,135 D$

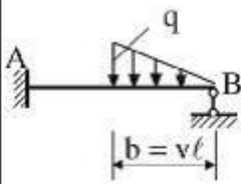
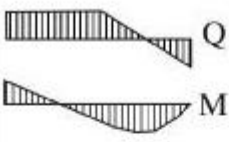
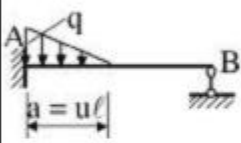
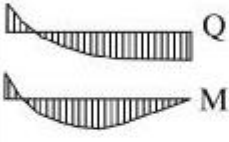
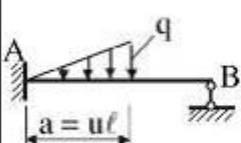
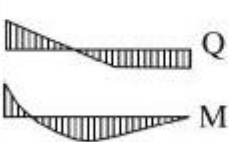
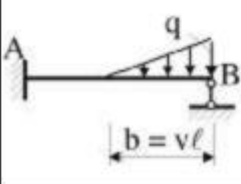
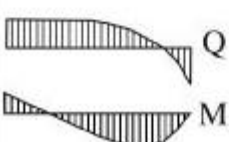
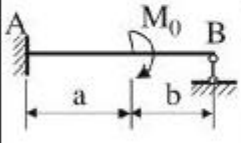
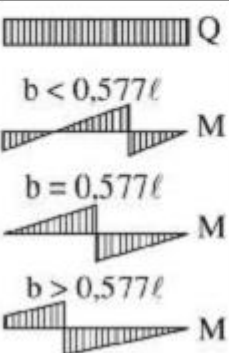
Phụ lục số 2. Các phản lực trong dầm siêu tĩnh một nhịp

Sơ đồ tải trọng	Biểu đồ Q và M	Trị số phản lực	Trị số phản lực mômen																								
1	2	3	4																								
1. Dầm một đầu ngàm và một đầu tựa khớp																											
		$A = \frac{Pb}{2l} \left(3 - \frac{b^2}{l^2} \right)$ $B = \frac{Pa^2}{2l^2} \left(3 - \frac{a}{l} \right)$	$M_A = -\frac{Pab}{2l^2} (\ell + b)$																								
		$A = \frac{11}{16}P$ $B = \frac{5}{16}P$	$M_A = -\frac{3}{16}P\ell$																								
		$A = P \left[1 + \frac{3a}{2l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \right]$ $B = 2P - A$	$M_A = -\frac{3}{2} \left(1 - \frac{a}{l} \right) Pa$																								
		$A = \frac{5}{8}q\ell$ $B = \frac{3}{8}q\ell$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{8}$																								
		$A = qa - B$ $B = \frac{qa}{2}u - q\ell k_1$ $M = -\frac{q\ell^2}{8}u^2(2 - u^2) = -q\ell^2 k_1$ <table border="1" data-bbox="844 1617 1396 1900"> <thead> <tr> <th>u</th><th>k₁</th><th>u</th><th>k₁</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,1</td><td>0,0045</td><td>0,6</td><td>0,082</td></tr> <tr> <td>0,2</td><td>0,0162</td><td>0,7</td><td>0,1035</td></tr> <tr> <td>0,3</td><td>0,0325</td><td>0,8</td><td>0,1152</td></tr> <tr> <td>0,4</td><td>0,0512</td><td>0,9</td><td>0,1225</td></tr> <tr> <td>0,5</td><td>0,0703</td><td>1,0</td><td>0,1250</td></tr> </tbody> </table>	u	k ₁	u	k ₁	0,1	0,0045	0,6	0,082	0,2	0,0162	0,7	0,1035	0,3	0,0325	0,8	0,1152	0,4	0,0512	0,9	0,1225	0,5	0,0703	1,0	0,1250	
u	k ₁	u	k ₁																								
0,1	0,0045	0,6	0,082																								
0,2	0,0162	0,7	0,1035																								
0,3	0,0325	0,8	0,1152																								
0,4	0,0512	0,9	0,1225																								
0,5	0,0703	1,0	0,1250																								

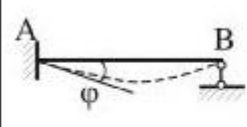
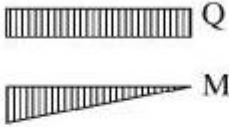
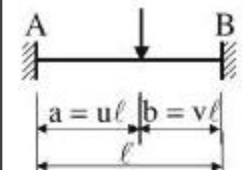
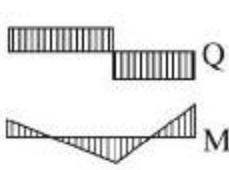
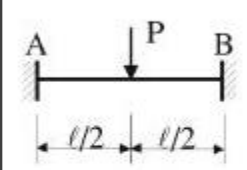
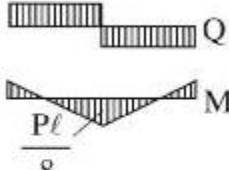
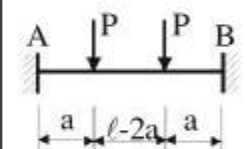
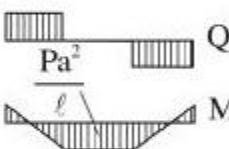
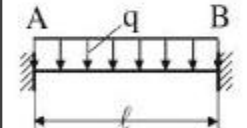
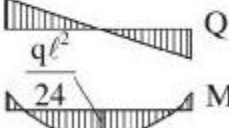
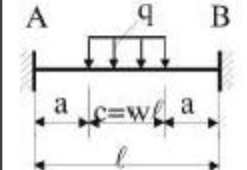
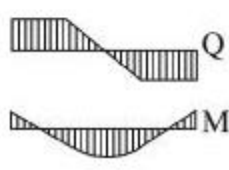
Phụ lục số 2 (tiếp theo)

1	2	3	4																								
		$A = \frac{qb}{2}v + q\ell k_2$ $B = qb - A$ $M = -\frac{q\ell^2}{8}v^2(2 - v^2) = -q\ell^2 k_2$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>v</th><th>k₂</th><th>v</th><th>k₂</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,1</td><td>0,0025</td><td>0,6</td><td>0,0738</td></tr> <tr> <td>0,2</td><td>0,0098</td><td>0,7</td><td>0,0925</td></tr> <tr> <td>0,3</td><td>0,0215</td><td>0,8</td><td>0,1088</td></tr> <tr> <td>0,4</td><td>0,0368</td><td>0,9</td><td>0,1205</td></tr> <tr> <td>0,5</td><td>0,0547</td><td>1,0</td><td>0,1250</td></tr> </tbody> </table>	v	k ₂	v	k ₂	0,1	0,0025	0,6	0,0738	0,2	0,0098	0,7	0,0925	0,3	0,0215	0,8	0,1088	0,4	0,0368	0,9	0,1205	0,5	0,0547	1,0	0,1250	
v	k ₂	v	k ₂																								
0,1	0,0025	0,6	0,0738																								
0,2	0,0098	0,7	0,0925																								
0,3	0,0215	0,8	0,1088																								
0,4	0,0368	0,9	0,1205																								
0,5	0,0547	1,0	0,1250																								
		$A = \frac{qc}{2} + \frac{qc}{16}(3 - w^2)$ $B = qc - A$	$M_A = -\frac{q\ell c}{16} \times (3 - w^2)$																								
		$A = \frac{21}{64}q\ell$ $B = \frac{11}{64}q\ell$	$M_A = -\frac{5}{64}q\ell^2$																								
		$A = \frac{q\ell}{8} \times (5 - 4u - 2u^2 + u^3)$ $B = q(\ell - a) - A$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{8} \times (1 - 2u^2 + u^3)$																								
		$A = \frac{2}{5}q\ell$ $B = \frac{1}{10}q\ell$	$M_A = -\frac{1}{15}q\ell^2$																								
		$A = \frac{9}{40}q\ell$ $B = \frac{11}{40}q\ell$	$M_A = -\frac{7}{120}q\ell^2$																								

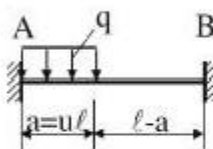
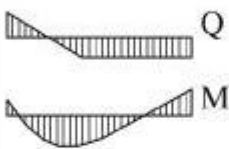
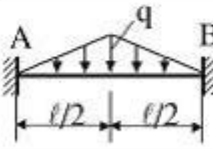
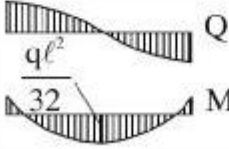
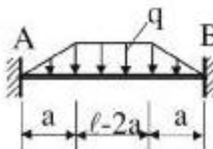
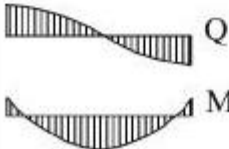
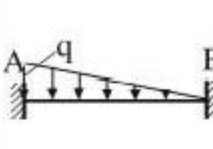
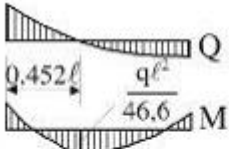
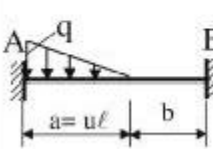
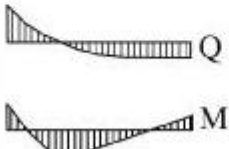
Phụ lục số 2 (tiếp theo)

1	2	3	4
		$A = \frac{q\ell}{10} v^2 (5 - v^2)$ $B = 0,5qb - A$	$M_A = -\frac{qb^2}{30} (5 - 3v^2)$
		$A = \frac{q\ell}{40} u \times$ $\times (20 - 5u^2 + u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{120} u^2 \times$ $\times (3u^2 - 15u + 20)$
		$A = \frac{q\ell}{40} u \times$ $\times (20 - 5u^2 + 4u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{qa^2}{120} \times$ $\times (12u^2 - 45u + 40)$
		$A = \frac{q\ell}{40} v^2 (10 - v^2)$ $B = 0,5qb - A$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{120} v^2 \times$ $\times (10 - 3v^2)$
B	M_0	$B = -\frac{M_0}{2} \frac{v}{\ell}$	
		$A = -\frac{3M_0(\ell^2 - b^2)}{2\ell^3}$ $B = -A$	$M_A = \frac{M_0}{2} \left(1 - 3\frac{b^2}{\ell^2} \right)$ Khi $b = 0,577\ell$ có $M_A = 0$

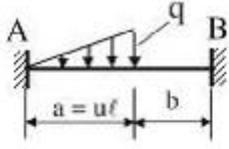
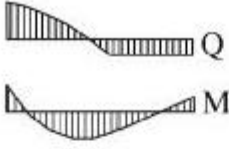
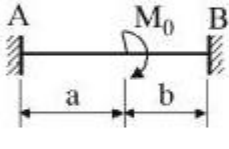
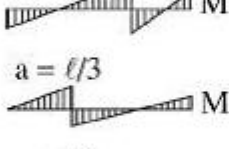
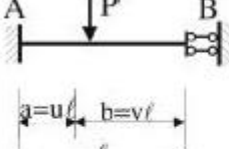
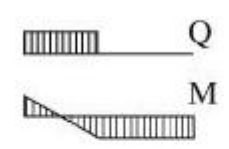
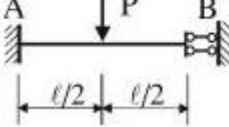
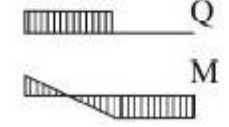
Phụ lục số 2 (tiếp theo)

1	2	3	4
		$A = -\frac{3EJ}{\ell^2} \varphi$ $B = +\frac{3EJ}{\ell^2} \varphi$	$M_A = +\frac{3EJ}{\ell} \varphi$
		$A = \frac{3EJ}{\ell^3} \Delta$ $B = -\frac{3EJ}{\ell^3} \Delta$	$M_A = -\frac{3EJ}{\ell^2} \Delta$
2. Dầm hai đầu liên kết ngàm			
		$A = P \frac{(3a+b)b^2}{\ell^3}$ $B = P \frac{(a+3b)a^2}{\ell^3}$	$M_A = -\frac{Pab^2}{\ell^2}$ $M_B = -\frac{Pa^2b}{\ell^2}$
		$A = B = \frac{P}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{P\ell}{8}$
		$A = B = P$	$M_A = M_B = -Pa \left(1 - \frac{a}{\ell} \right)$
		$A = B = \frac{q\ell}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{q\ell^2}{12}$
		$A = B = \frac{qc}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{qc\ell}{24} (3 - w^2)$

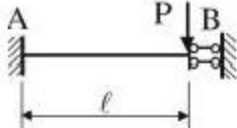
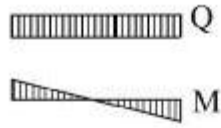
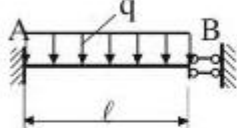
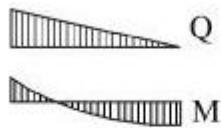
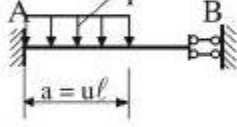
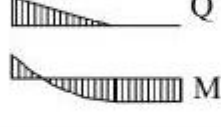
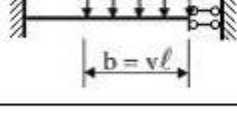
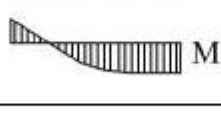
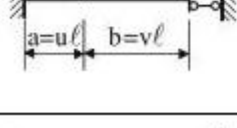
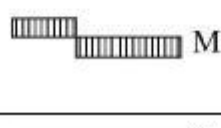
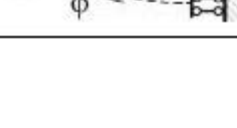
Phụ lục số 2 (tiếp theo)

1	2	3	4																																				
		$A = \frac{qa(\ell - 0,5a)}{\ell} + q\ell(k_1 - k_2)$ $B = \frac{qa^2}{2\ell} - q\ell(k_1 - k_2)$ $M_A = -\frac{q\ell^2}{6}u^2(3 - 4u + 1,5u^2) = -q\ell^2k_1$ $M_B = -\frac{q\ell^2}{3}u^2(u - 0,75u^2) = -q\ell^2k_2$ <table><tr><th>u</th><th>k₁</th><th>k₂</th><th>u</th><th>k₁</th><th>k₂</th></tr><tr><td>0,1</td><td>0,0044</td><td>0,0003</td><td>0,6</td><td>0,0684</td><td>0,0396</td></tr><tr><td>0,2</td><td>0,0151</td><td>0,0023</td><td>0,7</td><td>0,0764</td><td>0,0543</td></tr><tr><td>0,3</td><td>0,0290</td><td>0,0070</td><td>0,8</td><td>0,0811</td><td>0,0683</td></tr><tr><td>0,4</td><td>0,0437</td><td>0,0149</td><td>0,9</td><td>0,0830</td><td>0,0790</td></tr><tr><td>0,5</td><td>0,0573</td><td>0,0260</td><td>1,0</td><td>0,0833</td><td>0,0833</td></tr></table>	u	k ₁	k ₂	u	k ₁	k ₂	0,1	0,0044	0,0003	0,6	0,0684	0,0396	0,2	0,0151	0,0023	0,7	0,0764	0,0543	0,3	0,0290	0,0070	0,8	0,0811	0,0683	0,4	0,0437	0,0149	0,9	0,0830	0,0790	0,5	0,0573	0,0260	1,0	0,0833	0,0833	
u	k ₁	k ₂	u	k ₁	k ₂																																		
0,1	0,0044	0,0003	0,6	0,0684	0,0396																																		
0,2	0,0151	0,0023	0,7	0,0764	0,0543																																		
0,3	0,0290	0,0070	0,8	0,0811	0,0683																																		
0,4	0,0437	0,0149	0,9	0,0830	0,0790																																		
0,5	0,0573	0,0260	1,0	0,0833	0,0833																																		
		$A = B = \frac{q\ell}{4}$	$M_A = M_B = -\frac{5q\ell^2}{96}$																																				
		$A = B = \frac{q(\ell - a)}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{q\ell^2}{12} \times (1 - 2u^2 + u^3)$																																				
		$A = \frac{7}{20}q\ell$ $B = \frac{3}{20}q\ell$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{20}$ $M_B = -\frac{q\ell^2}{30}$																																				
		$A = \frac{qa}{20} \times (10 - 5u^2 + 2u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{qa^2}{6} \left(1 - u + \frac{3u^2}{10} \right)$ $M_B = -\frac{qa^2}{60} u (5 - 3u)$																																				

Phụ lục số 2 (tiếp theo)

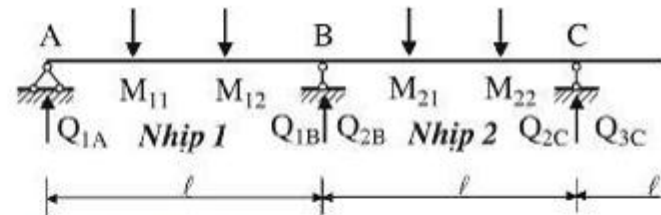
1	2	3	4
		$A = \frac{qa}{20} \times (10 - 15u^2 + 8u^3)$ $B = 0,5qa - A$	$M_A = -\frac{qa^2}{30} \times (10 - 15u + 6u^2)$ $M_B = -\frac{qa^3}{20\ell} (5 - 4u)$
		$A = -\frac{6M_0 ab}{\ell^3}$ $B = +\frac{6M_0 ab}{\ell^3}$	$M_A = \frac{M_0 b}{\ell^2} (2a - b)$ $M_B = \frac{M_0 a}{\ell^2} (a - 2b)$ Khi $a = \frac{\ell}{3}$: $M_A = 0$ $M_B = -\frac{M_0}{3}$
		$A = -\frac{6EJ}{\ell^2} \varphi$ $B = +\frac{6EJ}{\ell^2} \varphi$	$M_A = +\frac{4EJ}{\ell} \varphi$ $M_B = -\frac{2EJ}{\ell} \varphi$
		$A = +\frac{12EJ}{\ell^3} \Delta$ $B = -\frac{12EJ}{\ell^3} \Delta$	$M_A = -\frac{6EJ}{\ell^2} \Delta$ $M_B = +\frac{6EJ}{\ell^2} \Delta$
3. Dầm một đầu ngàm, một đầu ngàm trượt			
		$A = P$	$M_A = -\frac{Pa}{2} \left(2 - \frac{a}{\ell} \right)$ $M_B = \frac{Pa^2}{2\ell}$
		$A = P$	$M_A = -\frac{3}{8} P\ell$ $M_B = +\frac{1}{8} P\ell$

Phụ lục số 2 (tiếp theo)

1	2	3	4
		$A = P$	$M_A = -\frac{P\ell}{2}$ $M_B = +\frac{P\ell}{2}$
		$A = q\ell$	$M_A = -\frac{1}{3}q\ell^2$ $M_B = +\frac{1}{6}q\ell^2$
		$A = qa$	$M_A = -\frac{qa^2}{6}(3-u)$
		$A = qb$	$M_A = -\frac{q\ell^2}{6}(3v-v^3)$
		$A = 0$	$M_A = -M_0v = -\frac{M_0b}{\ell}$ $M_B = M_0u = \frac{M_0a}{\ell}$
		$A = 0$	$M_A = M_B = \frac{EJ}{\ell}\varphi$

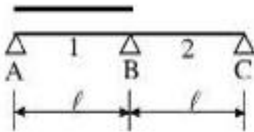
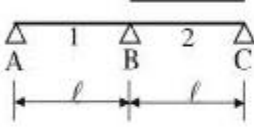
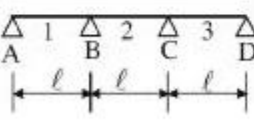
Phụ lục số 3. Mômen uốn, lực cắt và phản lực trong dầm liên tục có độ dài nhịp như nhau chịu tác dụng của tải trọng

Hình vẽ bên biểu thị cách ký hiệu các nội lực. Chỉ số thứ nhất của mô men và lực cắt biểu thị tên nhịp. Chỉ số thứ hai của mô men, khi có lực tập trung chỉ vị trí của lực, khi có lực phân bố chỉ trị số mô men lớn nhất trong nhịp. Chỉ số thứ hai của lực cắt biểu thị tên gối tựa sát với tiết diện.

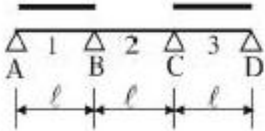
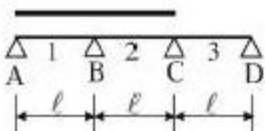


Sơ đồ nhịp chịu tải trọng	Mô men uốn, lực cắt và phản lực	Sơ đồ lực trên nhịp chịu tải				
1	2	3	4	5	6	7
Dầm hai nhịp						
	M_{11}	$0,070 q\ell^2$	$0,156 P\ell$	$0,222 P\ell$	$0,258 P\ell$	$0,048 q\ell^2$
	M_{12}	—	—	$0,111 P\ell$	$0,265 P\ell$	—
	M_{13}	—	—	—	$0,023 P\ell$	—
	M_B (min)	$-0,125 q\ell^2$	$-0,188 P\ell$	$-0,333 P\ell$	$-0,469 P\ell$	$-0,078 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,375 q\ell$	$0,313 P$	$0,667 P$	$1,031 P$	$0,172 q\ell$
	B (max)	$1,250 q\ell$	$1,375 P$	$2,667 P$	$3,938 P$	$0,656 q\ell$
	Q_{1B} (min)	$-0,625 q\ell$	$-0,688 P$	$-1,333 P$	$-1,969 P$	$-0,328 q\ell$

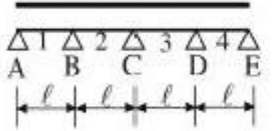
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	$M_{11} \text{ (max)}$	$0,096 \, q\ell^2$	$0,203 \, P\ell$	$0,278 \, P\ell$	$0,361 \, P\ell$	$0,065 \, q\ell^2$
	$M_{12} \text{ (max)}$	—	—	$0,222 \, P\ell$	$0,383 \, P\ell$	—
	$M_{13} \text{ (max)}$	—	—	—	$0,200 \, P\ell$	—
	M_B	$-0,063 \, q\ell^2$	$-0,094 \, P\ell$	$-0,167 \, P\ell$	$-0,234 \, P\ell$	$-0,039 \, q\ell^2$
	$A = Q_{1A} \text{ (max)}$	$0,438 \, q\ell$	$0,406 \, P$	$0,833 \, P$	$1,266 \, P$	$0,211 \, q\ell$
	$M_{11} \text{ (max)}$	—	$-0,047 \, P\ell$	$-0,056 \, P\ell$	$-0,059 \, P\ell$	$-0,018 \, q\ell^2$
	$M_{12} \text{ (max)}$	—	—	$-0,111 \, P\ell$	$-0,117 \, P\ell$	—
	$M_{13} \text{ (max)}$	—	—	—	$-0,176 \, P\ell$	—
	$A = Q_{1A} \text{ (max)}$	$-0,063 \, q\ell$	$-0,094 \, P$	$-0,167 \, P$	$-0,234 \, P$	$-0,039 \, q\ell$
Dầm ba nhịp						
	M_{11}	$0,080 \, q\ell^2$	$0,175 \, P\ell$	$0,244 \, P\ell$	$0,281 \, P\ell$	$0,054 \, q\ell^2$
	M_{12}	—	—	$0,156 \, P\ell$	$0,313 \, P\ell$	—
	M_{13}	—	—	—	$0,094 \, P\ell$	—
	M_{21}	$0,025 \, q\ell^2$	$0,100 \, P\ell$	$0,067 \, P\ell$	$0,000$	$0,021 \, q\ell^2$
	M_{22}	—	—	$0,067 \, P\ell$	$0,125 \, P\ell$	—
	M_B	$-0,100 \, q\ell^2$	$-0,150 \, P\ell$	$-0,267 \, P\ell$	$-0,375 \, P\ell$	$-0,063 \, q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,400 \, q\ell$	$0,350 \, P$	$0,733 \, P$	$1,125 \, P$	$0,188 \, q\ell$
	B	$1,100 \, q\ell$	$1,150 \, P$	$2,267 \, P$	$3,375 \, P$	$0,563 \, q\ell$
	Q_{1B}	$-0,600 \, q\ell$	$-0,650 \, P$	$-1,267 \, P$	$-1,875 \, P$	$-0,313 \, q\ell$
	$Q_{2B} = -Q_{2C}$	$0,500 \, q\ell$	$0,500 \, P$	$1,000 \, P$	$1,500 \, P$	$0,250 \, q\ell$

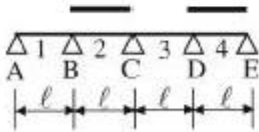
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	M_{11} (max) M_{12} (max) M_{13} (min) M_{21} (min) M_{22} (min) M_B $A = Q_{1A}$ (max)	$0,101 q\ell^2$ – – $- 0,050 q\ell^2$ – $- 0,050 q\ell^2$ $0,450 q\ell$	$0,213 P\ell$ – – $- 0,075 P\ell$ – $- 0,075 P\ell$ $0,425 P$	$0,289 P\ell$ $0,244 P\ell$ – $- 0,133 P\ell$ $- 0,133 P\ell$ $- 0,133 P\ell$ $0,867 P$	$0,328 P\ell$ $0,406 P\ell$ $0,234 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $1,313 P$	$0,068 q\ell^2$ – – $- 0,032 q\ell^2$ – $- 0,032 q\ell^2$ $0,219 q\ell$
	M_{11} (min) M_{12} (min) M_{13} (min) M_{21} (max) M_{22} (max) M_B $A = Q_{1A}$ (min)	– – – $0,075 q\ell^2$ – $- 0,050 q\ell^2$ $- 0,050 q\ell$	$- 0,038 P\ell$ – – $0,175 P\ell$ – $- 0,075 P\ell$ $- 0,075 P$	$- 0,044 P\ell$ $- 0,089 P\ell$ – $0,200 P\ell$ $0,200 P\ell$ $- 0,133 P\ell$ $- 0,133 P$	$- 0,047 P\ell$ $- 0,094 P\ell$ $- 0,141 P\ell$ $0,188 P\ell$ $0,313 P\ell$ $- 0,188 P\ell$ $- 0,188 P$	$- 0,014 q\ell^2$ – – $0,052 q\ell^2$ – $- 0,032 q\ell^2$ $- 0,032 q\ell$
	M_B (min) M_C B (max) Q_{1B} (min) Q_{2B} (max)	$- 0,117 q\ell^2$ $- 0,033 q\ell^2$ $1,200 q\ell$ $- 0,617 q\ell$ $0,583 q\ell$	$- 0,175 P\ell$ $- 0,050 P\ell$ $1,300 P$ $- 0,675 P$ $0,625 P$	$- 0,311 P\ell$ $- 0,089 P\ell$ $2,533 P$ $- 1,311 P$ $1,222 P$	$- 0,438 P\ell$ $- 0,125 P\ell$ $3,750 P$ $- 1,937 P$ $1,813 P$	$- 0,073 q\ell^2$ $- 0,022 q\ell^2$ $0,626 q\ell$ $- 0,323 q\ell$ $0,303 q\ell$

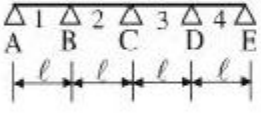
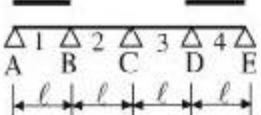
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (max)	$0,017 q\ell^2$	$0,025 P\ell$	$0,044 P\ell$	$0,063 P\ell$	$0,011 q\ell^2$
	M_C	$-0,067 q\ell^2$	$-0,100 P\ell$	$-0,178 P\ell$	$-0,250 P\ell$	$-0,042 q\ell^2$
	Q_{1B} (max)	$0,017 q\ell$	$0,025 P$	$0,044 P$	$0,063 P$	$0,011 q\ell$
	Q_{2B} (min)	$-0,083 q\ell$	$-0,125 P$	$-0,222 P$	$-0,313 P$	$-0,053 q\ell$
Dầm bốn nhịp						
	M_{11}	$0,077 q\ell^2$	$0,170 P\ell$	$0,238 P\ell$	$0,295 P\ell$	$0,052 q\ell^2$
	M_{12}	—	—	$0,143 P\ell$	$0,299 P\ell$	—
	M_{13}	—	—	—	$0,074 P\ell$	—
	M_{21}	$0,037 q\ell^2$	$0,116 P\ell$	$0,079 P\ell$	$0,007 P\ell$	$0,028 q\ell^2$
	M_{22}	—	—	$0,111 P\ell$	$0,165 P\ell$	—
	M_{23}	—	—	—	$0,074 P\ell$	—
	M_B	$-0,107 q\ell^2$	$-0,161 P\ell$	$-0,286 P\ell$	$-0,402 P\ell$	$-0,067 q\ell^2$
	M_C	$-0,071 q\ell^2$	$-0,107 P\ell$	$-0,190 P\ell$	$-0,268 P\ell$	$-0,045 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,393 q\ell$	$0,339 P$	$0,714 P$	$1,098 P$	$0,183 q\ell$
	B	$1,143 q\ell$	$1,214 P$	$2,381 P$	$3,536 P$	$0,590 q\ell$
	C	$0,929 q\ell$	$0,892 P$	$1,810 P$	$2,732 P$	$0,455 q\ell$
	Q_{1B}	$-0,607 q\ell$	$-0,661 P$	$-1,286 P$	$-1,902 P$	$-0,317 q\ell$
	Q_{2B}	$0,536 q\ell$	$0,554 P$	$1,095 P$	$1,634 P$	$0,273 q\ell$
	Q_{2C}	$-0,464 q\ell$	$-0,446 P$	$-0,905 P$	$-1,366 P$	$-0,228 q\ell$

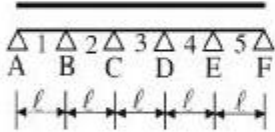
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	M_{11} (max)	$0,100 q\ell^2$	$0,210 P\ell$	$0,286 P\ell$	$0,325 P\ell$	$0,067 q\ell^2$
	M_{12} (max)	–	–	$0,238 P\ell$	$0,400 P\ell$	–
	M_{13} (max)	–	–	–	$0,224 P\ell$	–
	M_{21} (min)	–	$-0,067 P\ell$	$-0,127 P\ell$	$-0,184 P\ell$	$-0,028 q\ell^2$
	M_{22} (min)	–	–	$-0,111 P\ell$	$-0,167 P\ell$	–
	M_{23} (min)	–	–	–	$-0,151 P\ell$	–
	M_B	$-0,054 q\ell^2$	$-0,080 P\ell$	$-0,143 P\ell$	$-0,201 P\ell$	$-0,034 q\ell^2$
	M_C	$-0,036 q\ell^2$	$-0,054 P\ell$	$-0,095 P\ell$	$-0,134 P\ell$	$-0,023 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$ (max)	$0,446 q\ell$	$0,420 P$	$0,857 P$	$1,299 P$	$0,217 q\ell$
	M_{11} (min)	–	$-0,040 P\ell$	$-0,048 P\ell$	$-0,050 P\ell$	$-0,015 q\ell^2$
	M_{12} (min)	–	–	$-0,095 P\ell$	$-0,100 P\ell$	–
	M_{13} (min)	–	–	–	$-0,151 P\ell$	–
	M_{21} (max)	$0,080 q\ell^2$	$0,183 P\ell$	$0,206 P\ell$	$0,191 P\ell$	$0,056 q\ell^2$
	M_{22} (max)	–	–	$0,222 P\ell$	$0,333 P\ell$	–
	M_{23} (max)	–	–	–	$0,224 P\ell$	–
	M_B	$-0,054 q\ell^2$	$-0,080 P\ell$	$-0,143 P\ell$	$-0,201 P\ell$	$-0,034 q\ell^2$
	M_C	$-0,036 q\ell^2$	$-0,054 P\ell$	$-0,095 P\ell$	$-0,134 P\ell$	$-0,023 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$ (min)	$-0,054 q\ell^2$	$-0,080 P$	$-0,143 P$	$-0,201 P$	$-0,034 q\ell$

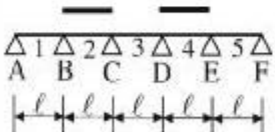
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (min) M_C M_D B (max) Q_{1B} (min) Q_{2B} (max)	$-0,121 q\ell^2$ $-0,018 q\ell^2$ $-0,058 q\ell^2$ $1,223 q\ell$ $-0,621 q\ell$ $0,603 q\ell$	$-0,181 P\ell$ $-0,027 P\ell$ $-0,087 P\ell$ $1,335 P$ $-0,681 P$ $0,654 P$	$-0,321 P\ell$ $-0,048 P\ell$ $-0,155 P\ell$ $2,595 P$ $-1,324 P$ $1,274 P$	$-0,452 P\ell$ $-0,067 P\ell$ $-0,218 P\ell$ $3,837 P$ $-1,952 P$ $1,885 P$	$-0,076 q\ell^2$ $-0,012 q\ell^2$ $-0,036 q\ell^2$ $0,639 q\ell$ $-0,326 q\ell$ $0,314 q\ell$
	M_B (max) M_C M_D B (min) Q_{1B} (max) Q_{2B} (min)	$0,043 q\ell^2$ $-0,054 q\ell^2$ $-0,049 q\ell^2$ $-0,080 q\ell$ $0,013 q\ell$ $-0,067 q\ell$	$0,020 P\ell$ $-0,080 P\ell$ $-0,074 P\ell$ $-0,121 P$ $0,020 P$ $-0,100 P$	$0,036 P\ell$ $-0,143 P\ell$ $-0,131 P\ell$ $-0,214 P$ $0,036 P$ $-0,178 P$	$0,050 P\ell$ $-0,201 P\ell$ $-0,184 P\ell$ $-0,301 P$ $0,050 P$ $-0,251 P$	$0,009 q\ell^2$ $-0,033 q\ell^2$ $-0,031 q\ell^2$ $0,050 q\ell$ $0,009 q\ell$ $-0,041 q\ell$
	M_B M_C (min) C (max) Q_{2C} (min)	$-0,036 q\ell^2$ $-0,107 q\ell^2$ $1,143 q\ell$ $-0,571 q\ell$	$-0,054 P\ell$ $-0,161 P\ell$ $1,214 P$ $-0,607 P$	$-0,095 P\ell$ $-0,286 P\ell$ $2,381 P$ $-1,191 P$	$-0,134 P\ell$ $-0,402 P\ell$ $3,536 P$ $-1,768 P$	$-0,023 q\ell^2$ $-0,067 q\ell^2$ $0,589 q\ell$ $-0,295 q\ell$
	M_B M_C (max) C (min) Q_{2C} (max)	$-0,071 q\ell^2$ $0,036 q\ell^2$ $-0,214 q\ell$ $0,107 q\ell$	$-0,107 P\ell$ $0,054 P\ell$ $-0,321 P$ $0,161 P$	$-0,190 P\ell$ $0,095 P\ell$ $-0,571 P$ $0,286 P$	$-0,268 P\ell$ $0,134 P\ell$ $-0,804 P$ $0,402 P$	$-0,050 q\ell^2$ $0,022 q\ell^2$ $-0,134 q\ell$ $0,067 q\ell$

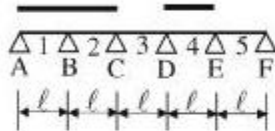
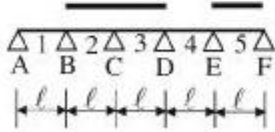
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
Dầm năm nhịp						
	M_{11}	$0,078 q\ell^2$	$0,171 P\ell$	$0,240 P\ell$	$0,276 P\ell$	$0,053 q\ell^2$
	M_{12}	–	–	$0,146 P\ell$	$0,303 P\ell$	–
	M_{13}	–	–	–	$0,079 P\ell$	–
	M_{21}	$0,33 q\ell^2$	$0,112 P\ell$	$0,076 P\ell$	$0,005 P\ell$	$0,062 q\ell^2$
	M_{22}	–	–	$0,099 P\ell$	$0,155 P\ell$	–
	M_{23}	–	–	–	$0,054 P\ell$	–
	M_{31}	$0,046 q\ell^2$	$0,132 P\ell$	$0,123 P\ell$	$0,079 P\ell$	$0,034 q\ell^2$
	M_{32}	–	–	$0,123 P\ell$	$0,204 P\ell$	–
	M_B	$-0,105 q\ell^2$	$-0,158 P\ell$	$-0,281 P\ell$	$-0,395 P\ell$	$-0,066 q\ell^2$
	M_C	$-0,079 q\ell^2$	$-0,118 P\ell$	$-0,211 P\ell$	$-0,296 P\ell$	$-0,050 q\ell^2$
	$A = Q_{1A}$	$0,395 q\ell$	$0,342 P$	$0,719 P$	$1,105 P$	$0,185 q\ell$
	B	$1,132 q\ell$	$1,198 P$	$2,351 P$	$3,494 P$	$0,582 q\ell$
	C	$0,974 q\ell$	$0,960 P$	$1,930 P$	$2,901 P$	$0,484 q\ell$
	Q_{1B}	$-0,605 q\ell$	$-0,658 P$	$-1,281 P$	$-1,895 P$	$-0,316 q\ell$
	Q_{2B}	$0,526 q\ell$	$0,540 P$	$1,070 P$	$1,599 P$	$0,266 q\ell$
	Q_{2C}	$-0,474 q\ell$	$-0,460 P$	$-0,930 P$	$-1,401 P$	$-0,234 q\ell$
	Q_{3C}	$0,500 q\ell$	$0,500 P$	$1,000 P$	$1,500 P$	$0,250 q\ell$

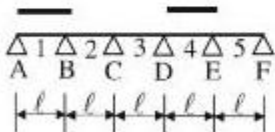
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	$M_{11} \max$	$0,100 q\ell^2$	$0,211 P\ell$	$0,287 P\ell$	$0,326 P\ell$	$0,068 q\ell^2$
	$M_{12} \max$	-	-	$0,240 P\ell$	$0,401 P\ell$	-
	$M_{13} \max$	-	-	-	$0,227 P\ell$	-
	$M_{21} \min$	-	$-0,069 P\ell$	$-0,129 P\ell$	$-0,185 P\ell$	$-0,029 q\ell^2$
	$M_{22} \min$	-	-	$-0,117 P\ell$	$0,173 P\ell$	-
	$M_{23} \min$	-	-	-	$-0,160 P\ell$	-
	$M_{31} \max$	$0,086 q\ell^2$	$0,191 P\ell$	$0,228 P\ell$	$0,227 P\ell$	$0,059 q\ell^2$
	$M_{32} \max$	-	-	$0,228 P\ell$	$0,352 P\ell$	-
	M_B	$-0,053 q\ell^2$	$-0,079 P\ell$	$-0,140 P\ell$	$-0,197 P\ell$	$-0,033 q\ell^2$
	M_C	$-0,039 q\ell^2$	$-0,059 P\ell$	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	$-0,025 q\ell^2$
	$A = Q_{1A} (\max)$	$0,447 q\ell$	$0,421 P$	$0,860 P$	$1,303 P$	$0,217 q\ell$
	$M_{11} \min$	-	$-0,039 P\ell$	$-0,047 P\ell$	$-0,050 P\ell$	$-0,015 q\ell^2$
	$M_{12} \min$	-	-	$-0,094 P\ell$	$-0,099 P\ell$	-
	$M_{13} \min$	-	-	-	$-0,148 P\ell$	-
	$M_{21} (\max)$	$0,079 q\ell^2$	$0,181 P\ell$	$0,205 P\ell$	$0,190 P\ell$	$0,055 q\ell^2$
	$M_{22} (\max)$	-	-	$0,216 P\ell$	$0,327 P\ell$	-
	$M_{23} (\max)$	-	-	-	$0,215 P\ell$	-
	$M_{31} (\min)$	-	$-0,059 P\ell$	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	$-0,025 q\ell$
	$M_{32} (\min)$	-	-	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	-
	M_B	$-0,053 q\ell^2$	$-0,079 P\ell$	$-0,140 P\ell$	$-0,198 P\ell$	$-0,033 q\ell^2$
	M_C	$-0,039 q\ell^2$	$-0,059 P\ell$	$-0,105 P\ell$	$-0,148 P\ell$	$-0,025 q\ell^2$
	$A = Q_{1A} (\min)$	$-0,053 q\ell$	$-0,079 P$	$0,140 P$	$-0,198 P\ell$	$-0,033 q\ell$

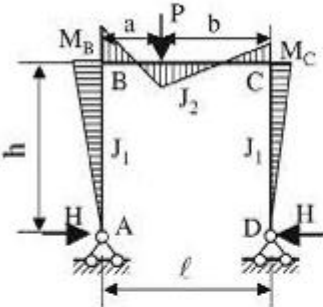
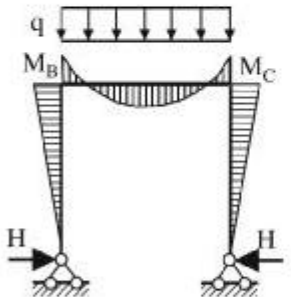
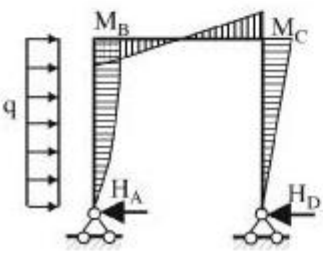
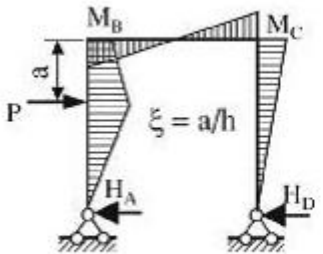
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (min)	$-0,120 q\ell^2$	$-0,179 P\ell$	$-0,319 P\ell$	$-0,449 P\ell$	$-0,075 q\ell^2$
	M_C	$-0,022 q\ell^2$	$-0,032 P\ell$	$-0,057 P\ell$	$-0,081 P\ell$	$-0,014 q\ell^2$
	M_D	$-0,044 q\ell^2$	$-0,066 P\ell$	$-0,118 P\ell$	$-0,166 P\ell$	$-0,027 q\ell^2$
	M_E	$-0,051 q\ell^2$	$-0,077 P\ell$	$-0,137 P\ell$	$-0,193 P\ell$	$-0,032 q\ell^2$
	B (max)	$1,218 q\ell$	$1,327 P$	$2,581 P$	$3,816 P$	$0,636 q\ell$
	Q_{1B} (min)	$-0,620 q\ell$	$-0,679 P$	$-1,319 P$	$-1,949 P$	$-0,325 q\ell$
	Q_{2B} (max)	$0,598 q\ell$	$0,647 P$	$1,262 P$	$1,867 P$	$0,311 q\ell$
	M_B	$-0,035 q\ell^2$	$-0,052 P\ell$	$-0,093 P\ell$	$-0,130 P\ell$	$-0,022 q\ell^2$
	M_C (min)	$-0,111 q\ell^2$	$-0,167 P\ell$	$-0,297 P\ell$	$-0,417 P\ell$	$-0,070 q\ell^2$
	M_D	$-0,020 q\ell^2$	$-0,031 P\ell$	$-0,054 P\ell$	$-0,076 P\ell$	$-0,013 q\ell^2$
	M_E	$-0,057 q\ell^2$	$-0,086 P\ell$	$-0,153 P\ell$	$-0,215 P\ell$	$-0,036 q\ell^2$
	C (max)	$0,167 q\ell$	$-1,251 P$	$2,447 P$	$3,628 P$	$0,605 q\ell$
	Q_{2C} (min)	$-0,576 q\ell$	$-0,615 P$	$-1,204 P$	$-1,787 P$	$-0,298 q\ell$
	Q_{3C} (max)	$0,591 q\ell$	$0,636 P$	$1,242 P$	$1,841 P$	$-0,307 q\ell$

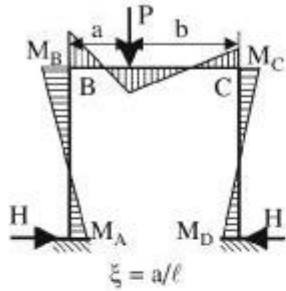
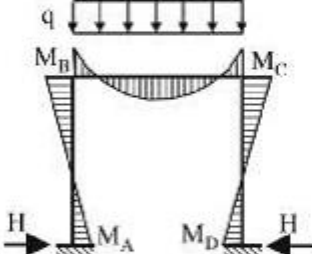
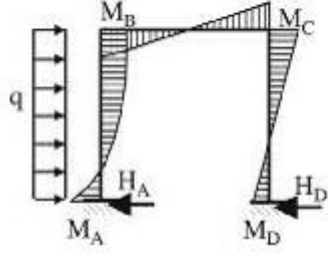
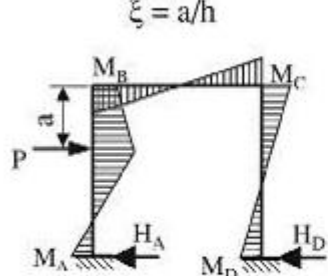
Phụ lục số 3 (tiếp theo)

1	2	3	4	5	6	7
	M_B (max)	$-0,044 q\ell^2$	$0,022 P\ell$	$0,038 P\ell$	$0,054 P\ell$	$0,009 q\ell^2$
	M_C	$-0,057 q\ell^2$	$-0,086 P\ell$	$-0,153 P\ell$	$0,215 P\ell$	$-0,036 q\ell^2$
	M_D	$-0,035 q\ell^2$	$-0,052 P\ell$	$-0,093 P\ell$	$-0,130 P\ell$	$-0,022 q\ell^2$
	M_E	$-0,054 q\ell^2$	$-0,081 P\ell$	$-0,144 P\ell$	$-0,202 P\ell$	$-0,034 q\ell^2$
	B (min)	$-0,086 q\ell$	$-0,129 P$	$-0,230 P$	$-0,323 P$	$-0,054 q\ell$
	Q_{1B} (max)	$0,014 q\ell$	$0,022 P$	$0,038 P$	$0,054 P$	$0,009 q\ell$
	Q_{2B} (min)	$-0,072 q\ell$	$-0,108 P$	$-0,191 P$	$-0,269 P$	$-0,045 q\ell$
	M_B	$-0,071 q\ell^2$	$-0,106 P\ell$	$-0,188 P\ell$	$-0,265 P\ell$	$-0,044 q\ell^2$
	M_C (max)	$0,032 q\ell^2$	$0,048 P\ell$	$0,086 P\ell$	$0,121 P\ell$	$0,020 q\ell^2$
	M_D	$-0,059 q\ell^2$	$-0,088 P\ell$	$-1,156 P\ell$	$-0,220 P\ell$	$-0,037 q\ell^2$
	M_E	$-0,048 q\ell^2$	$-0,072 P\ell$	$-0,128 P\ell$	$-0,179 P\ell$	$-0,030 q\ell^2$
	C (min)	$-0,194 q\ell$	$-0,291 P$	$-0,517 P$	$-0,727 P$	$-0,120 q\ell$
	Q_{2C} (max)	$0,103 q\ell$	$0,154 P$	$0,274 P$	$0,386 P$	$0,064 q\ell$
	Q_{3C} (min)	$-0,091 q\ell$	$-0,136 P$	$-0,242 P$	$-0,341 P$	$-0,057 q\ell$

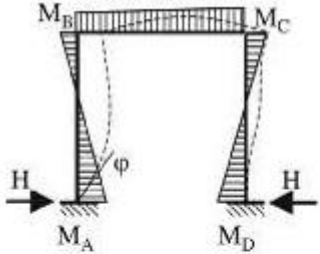
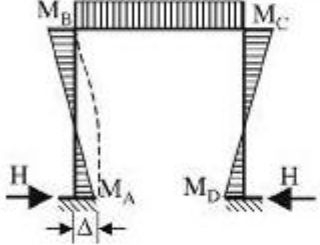
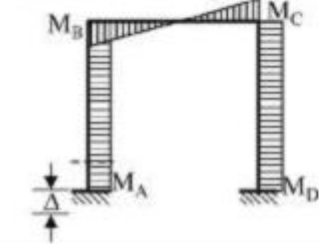
Phụ lục số 4. Mômen uốn và phản lực trong một số kết cấu

Sơ đồ tải trọng và biểu đồ mô men uốn	Các mô men uốn và phản lực
1	2
1. Khung một nhịp có các cột liên kết tựa khớp cố định	
	$k = \frac{J_2 h}{J_1 \ell}$ $M_B = M_C = \frac{3}{2} \frac{Pab}{\ell(3+2k)}$ $H = \frac{3}{2} \frac{Pab}{h\ell(3+2k)}$
	$M_B = M_C = \frac{q\ell^2}{4(3+2k)}$ $H = \frac{q\ell^2}{4h(3+2k)}$
	$M_B = \frac{6+3k}{3+2k} \frac{qh^2}{8}$ $M_C = \frac{6+5k}{3+2k} \frac{qh^2}{8}$ $H_D = \frac{6+5k}{3+2k} \frac{qh}{8}$ $H_A = qh - H_D$
	$M_B = \frac{1-\xi}{2} \frac{3+2k-k\xi(2-\xi)}{3+2k} Ph$ $M_C = \frac{1-\xi}{2} \frac{3+2k+k\xi(2-\xi)}{3+2k} Ph$ $H_D = \frac{1-\xi}{2} \frac{3+2k+k\xi(2-\xi)}{3+2k} P$ $H_A = P - H_D$

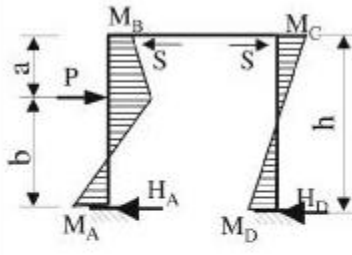
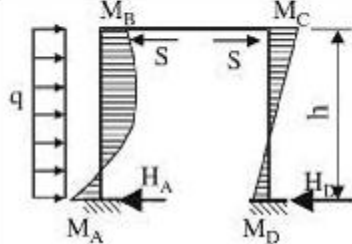
Phụ lục 4 (tiếp theo)

1	2
2. Khung một nhịp có các cột liên kết ngàm	
 $\xi = a/\ell$	$M_{B,C} = \left(\frac{2}{2+k} \pm \frac{1-2\xi}{1+6k} \right) \frac{Pab}{2\ell} \quad (+ \text{ với } M_B; - \text{ với } M_C)$ $M_{A,D} = \left(\frac{1}{2+k} \mp \frac{1-2\xi}{1+6k} \right) \frac{Pab}{2\ell} \quad (- \text{ với } M_A; + \text{ với } M_D)$ $H = \frac{3}{2+k} \frac{Pab}{2h\ell}$ $K = \frac{J_2 h}{J_1 \ell}$
	$M_B = M_C = \frac{1}{2+k} \frac{q\ell^2}{6}$ $M_A = M_D = \frac{1}{2+k} \frac{q\ell^2}{12}$ $H = \frac{3}{2+k} \frac{q\ell^2}{12h}$
	$M_{B,C} = k \left(\frac{12}{1+6k} \mp \frac{1}{2+k} \right) \frac{qh^2}{24} \quad (- \text{ với } M_B; + \text{ với } M_C)$ $M_A = \left(\frac{5+18k}{1+6k} + \frac{1}{2+k} + 2 \right) \frac{qh^2}{24}$ $M_D = \left(\frac{5+18k}{1+6k} - \frac{1}{2+k} \right) \frac{qh^2}{24}$ $H_D = \frac{17+18k}{1+6k} \frac{qh}{24}$ $H_A = qh - H_D$
 $\xi = a/h$	$M_{B,C} = \frac{k(1-\xi)^2}{2} \left(\frac{3}{1+6k} \mp \frac{\xi}{2+k} \right) Ph$ $M_A = \left[(1-\xi) - \frac{(1-\xi)^2}{2} \left(\frac{2+k+\xi+\xi k}{2+k} + \frac{3k}{1+6k} \right) \right] Ph$ $M_D = \frac{(1-\xi)^2}{2} \left(\frac{2+k+\xi+\xi k}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right) Ph$ $H_D = \frac{(1-\xi)^2}{2} \frac{2+k+\xi+2\xi k}{2+k} P$

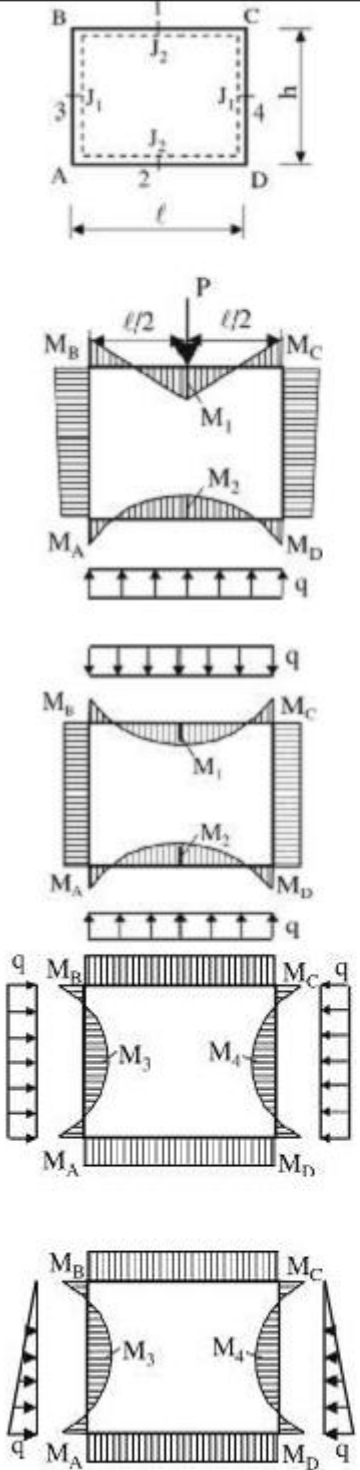
Phụ lục 4. (tiếp theo)

1	2
<i>Ngàm A xoay</i> 	$M_{B,C} = Ei_1 k \left(\frac{1}{2+k} \mp \frac{3}{1+6k} \right) \varphi \quad (- \text{ với } M_B; + \text{ với } M_C)$ $M_{A,D} = Ei_1 \left(\frac{3+2k}{2+k} \pm \frac{3k}{1+6k} \right) \varphi \quad (+ \text{ với } M_A; - \text{ với } M_D)$ $H = \frac{3Ei_1}{h} \frac{1+k}{2+k} \varphi$
<i>Ngàm A có chuyển vị ngang</i> 	$M_B = M_C = \frac{3EJ_1}{h^2} \frac{k}{2+k} \Delta$ $M_A = M_D = \frac{3EJ_1}{h^2} \frac{1+k}{2+k} \Delta$ $H = \frac{3EJ_1}{h^3} \frac{1+2k}{2+k} \Delta$
<i>Ngàm A bị lún xuống</i> 	$M_B = M_C = \frac{6EJ_1}{\ell^2} \frac{k}{1+6k} \Delta$ $M_A = M_D = M_B$ $H = 0$

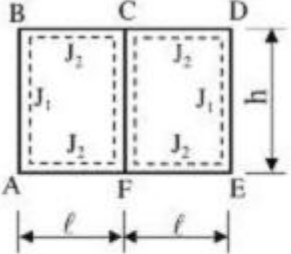
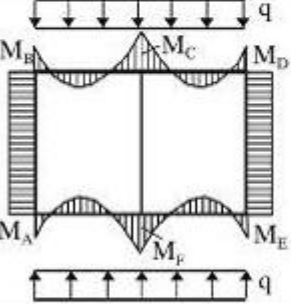
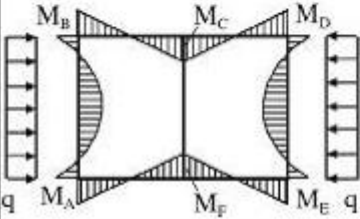
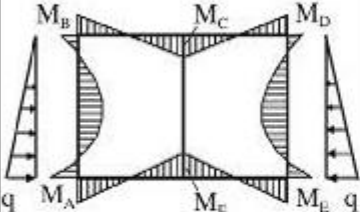
3. Khung một nhịp có thanh dầm cứng tuyệt đối liên kết cứng với cột

	$S = P \frac{(3a+b)b^2}{2h^3}; \quad H_D = S; \quad H_A = P - S$ $M_D = M_C = P \frac{(3a+b)b^2}{4h^2};$ $M_B = P \frac{(b-a)b^2}{4h^2}$ $M_A = Pb - Sh - M_B$
	$S = \frac{1}{4}qh; \quad H_A = \frac{3}{4}qh; \quad H_D = \frac{1}{4}qh$ $M_C = M_D = \frac{qh^2}{8}; \quad M_B = \frac{qh^2}{24}; \quad M_A = \frac{5qh^2}{24}$

Phụ lục 4 (tiếp theo)

4. Khung một nhịp khép kín	
	$i_1 = \frac{J_1}{h}; \quad i_2 = \frac{J_2}{\ell}; \quad k = \frac{i_2}{i_1}$ Các tiết diện 1, 2, 3, 4 ở giữa các thanh; Đường nét đứt chỉ phía mômen có dấu dương. $M_A = M_D = -\frac{P\ell}{24} \frac{k+6}{(k+3)(k+1)}$ $M_B = M_C = -\frac{P\ell}{24} \frac{4k+9}{(k+3)(k+1)}$ $M_1 = \frac{P\ell}{24} \frac{6k^2+20k+9}{(k+3)(k+1)}$ $M_2 = \frac{P\ell}{24} \frac{3k^2+11k+3}{(k+3)(k+1)}$ $M_A = M_B = M_C = M_D = -\frac{q\ell^2}{12} \frac{1}{k+1}$ $M_1 = M_2 = \frac{q\ell^2}{24} \frac{3k+1}{k+1}$ $M_A = M_B = M_C = M_D = -\frac{qh^2}{12} \frac{k}{k+1}$ $M_3 = M_4 = \frac{qh^2}{12} \frac{2k+3}{k+1}$ $M_A = M_D = -\frac{qh^2k(3k+8)}{60(k^2+4k+3)}$ $M_B = M_C = -\frac{qh^2k(2k+7)}{60(k^2+4k+3)}$ $M_3 = M_4 = \frac{qh^2(k+3)}{48(k+1)}$

Phụ lục 4 (tiếp theo)

1	2
5. Khung hai nhịp khép kín	
	$i_1 = \frac{J_1}{h}; \quad i_2 = \frac{J_2}{l}; \quad k = \frac{i_2}{i_1}$ Đường nét đứt chỉ phía mômen có dấu dương.
	$M_A = M_B = M_D = M_E = -\frac{q\ell^2}{12} \frac{1}{2k+1}$ $M_{CB} = M_{CD} = M_C = -\frac{q\ell^2}{12} \frac{3k+1}{2k+1}$ $M_{FA} = M_{FE} = M_F = M_C$ M_{CB} – Mômen uốn tại đầu C của thanh CB
	$M_A = M_B = M_D = M_E = -\frac{qh^2}{6} \frac{k}{2k+1}$ $M_{CB} = M_{CD} = M_C = M_{FA} = M_{FE} = M_F = \frac{qh^2}{12} \frac{k}{2k+1}$ $M_{CF} = M_{FC} = 0$
	$m = \frac{20(k+6)(2k+1)}{k}$ $M_B = M_D = -\frac{qh^2}{6} \frac{8k+59}{m}$ $M_A = M_E = -\frac{qh^2}{6} \frac{12k+61}{m}$ $M_C = M_{CB} = M_{CD} = \frac{qh^2}{6} \frac{7k+31}{m}$ $M_F = M_{FA} = M_{FE} = \frac{qh^2}{6} \frac{3k+29}{m}$ $M_{CF} = M_{FC} = 0$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

1. Bộ môn Cơ học lý thuyết – Đại học Thủy lợi Hà Nội, 1976. *Bài tập cơ học lý thuyết*.
2. Bộ Nông nghiệp và PTNT – Viện Khoa học Thủy lợi, 2011. *Sổ tay kỹ thuật thủy lợi – Tập 1*. Nhà xuất bản Nông nghiệp, Hà Nội.
3. Bộ Thủy lợi, 1979. *Sổ tay kỹ thuật thủy lợi, - Tập 1*. Nhà xuất bản Nông nghiệp, Hà Nội.
4. Bùi Trọng Lưu-Nguyễn Văn Vượng, 1999. *Bài tập sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.
5. Đại học Đà Nẵng, 2005. *Giáo trình Cơ học lý thuyết – Phần tĩnh học*. Trường Đại học Bách khoa Đà Nẵng.
6. Đỗ Kiến Quốc - Nguyễn Thị Hiền Lương - Bùi Công Thành – Lê Hoàng Tuấn – Trần Tấn Quốc, 2010. *Giáo trình sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh.
7. Đỗ Sanh – Nguyễn Văn Đình – Nguyễn Văn Khang, 2009. *Cơ học. Tập 1- Tĩnh học và động học*. Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội.
8. Fa- Hwa Cheng, Ph.D., P.E, 2000. *Tĩnh học và sức bền vật liệu – Tĩnh học* (Bản dịch của Lưu Văn Hy, do Võ Văn Lộc hiệu đính). Nhà xuất bản Thành phố Hồ Chí Minh.
9. Fa- Hwa Cheng, Ph.D., P.E, 2001. *Tĩnh học và sức bền vật liệu – Sức bền vật liệu* (Bản dịch của Lưu Văn Hy, do Võ Văn Lộc hiệu đính). Nhà xuất bản Thành phố Hồ Chí Minh.
10. I.N.Mirôliubốp – X.A. Englutrep – N.Đ. Xerghiepxki – Ph.D. Almametốp – N.A. Kurit xun – K.G.Xmiromốp – Vaxiliep – L.V. Lasina, 1988. *Bài tập sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản Đại học và THCN, Hà Nội và Nhà xuất bản Mir.
11. Lê Hoàng Tuấn – Nguyễn Trọng Phước. *Bài giảng điện tử Sức bền vật liệu*. Đại học Bách khoa TP Hồ Chí Minh.
12. Lê Quang Minh – Nguyễn Văn Vượng, 2007. *Sức bền vật liệu – Tập 1*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.
13. Lê Quang Minh – Nguyễn Văn Vượng, 2007. *Sức bền vật liệu – Tập 2*. Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.
14. Lê Viết Giảng – Lê Viết Thành, 2002. *Sức bền vật liệu –Tập 2*. Trường Đại học kỹ thuật Đà Nẵng.
15. Lê Thọ Trình, 1993. *Cơ học kết cấu. Tập 1- Hệ tĩnh định*. Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
16. Nguyễn Duy Khương. *Bài giảng điện tử: Bài giảng môn cơ học*. Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh.
17. Nguyễn Trọng Chuyên – Phan Văn Cúc, 1991. *Bài tập cơ học lý thuyết*. Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, Hà Nội.
18. Nguyễn Văn Đình – Nguyễn Văn Khang – Đỗ Sanh, 1990. *Cơ học. Tập 1- Phần Tĩnh học và Động học*. Nhà xuất bản Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà Nội.
19. Nguyễn Văn Quảng. *Bài tập sức bền vật liệu*. Trường Đại học Giao thông vận tải TP. Hồ Chí Minh.

20. Phạm Văn Chiêu – Trần Hữu Duẩn – Nguyễn Khắc Đạm, 1969. *Sức bền vật liệu. Tập 1 và 2* (Chương trình Trung học chuyên nghiệp). Nhà xuất bản Đại học và THCN, Hà Nội.
21. Phan Văn Cúc – Nguyễn Trọng, 2003. *Giáo trình cơ học lý thuyết*. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội.
22. Trần Hữu Duẩn – Nguyễn Khắc Đạm – Vũ Tiến Trình, 1969. *Cơ sở cơ học lý thuyết. Phần tĩnh học* (Chương trình Trung học chuyên nghiệp). Nhà xuất bản Đại học và THCN, Hà Nội.
23. Trần Hữu Huy, 2009. Bài giảng điện tử: *Sức bền vật liệu*. Trường Đại học Tôn Đức Thắng, TP. Hồ Chí Minh.
24. Trần Minh Tú. Bài giảng điện tử: *Sức bền vật liệu*. Trường Đại học Xây dựng Hà Nội.
25. Trần Quốc Tuấn. *Phần mềm tra thép hình*. Chi cục Phòng chống lụt bão và Quản lý điều chỉnh tỉnh Nghệ An.
26. Vũ Duy Cường, 2009. *Cơ lý thuyết*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.

TIẾNG ANH

27. B.K Sarkar, 2003. *Strength of Materials*. Tata McGraw-Hill Education.
28. Dr.R.K Bansal, 2010. *A Textbook of strength of Materials*. Laxmi Publications, Ltd.
29. Surya N. Patmaik and Dale A.Hopkins, 2004. *Strength of Materials*. NASA Ohio Aerospace Institute – NASA Lewis Research Center.

MỘT SỐ WEBSITE THAM KHẢO

<http://www.sac.edu.vn>
<http://www.vncold.vn>
<http://www.vawr.org.vn>
<http://www.Tailieu.vn>
<http://www.wru.edu.vn>
<http://www.svgtyt.net>
<http://www.hcmut.edu.vn>
<http://www.home.green-life.com>
<http://www.springer.com>
<http://www.engineersedge.com>

DANH SÁCH HỘI ĐỒNG THẨM ĐỊNH GIÁO TRÌNH LỰC HỌC
BẬC TRUNG CẤP CHUYÊN NGHIỆP NGÀNH THỦY LỢI TỔNG HỢP
 (Ban hành theo Quyết định số 17 / QĐ-CDNB ngày 25/06/2012 của Hiệu trưởng)

T T	Họ và tên	Học vị	Ngành	Đơn vị công tác	Chức đanh
1	Dương Văn Viện	PGS.TS	Thủy lợi	Trường Cao đẳng Nông nghiệp Nam Bộ - Bộ Nông nghiệp và Phát triển nông thôn.	Chủ tịch
2	Mai Đức Phú	Thạc sĩ	Thủy lợi	Trường Cao đẳng Nông nghiệp Nam Bộ, Bộ Nông nghiệp và Phát triển nông thôn.	Thư ký
3	Nguyễn Văn Cồn	Thạc sĩ	Thủy lợi	Trường Cao đẳng Nông nghiệp Nam Bộ, Bộ Nông nghiệp và Phát triển nông thôn.	Phản biện 1
4	Trần Hữu Minh	Kỹ sư	Thủy lợi	Cty TNHH Tư vấn Xây dựng Thông Thái – Thành phố Mỹ Tho, tỉnh Tiền Giang.	Phản biện 2
5	Nguyễn Văn Dinh	Kỹ sư	Thủy lợi	Văn phòng 2, Bộ Nông nghiệp và Phát triển nông thôn (T.P Hồ Chí Minh)	Ủy viên
6	Lê Văn Dũng	Thạc sĩ	Thủy lợi	Cty MTV Quản lý khai thác thủy lợi Dầu Tiếng - Phước Hòa (Tây Ninh) - Bộ Nông nghiệp và PTNT	Ủy viên
7	Vũ Thị Hợi	Kỹ sư	Thủy lợi	Trường Cao đẳng Nông nghiệp Nam Bộ, Bộ Nông nghiệp và Phát triển nông thôn.	Ủy viên

Danh sách Hội đồng Thẩm định giáo trình Lực học có 7 (bảy) người ./.

